

1. 두 다항식  $A, B$  에 대하여  $A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ ,  $2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1$  일 때, 두 다항식  $A, B$  를 구하면?

①  $A = x^3 + x^2 + x + 2$ ,  $B = -2x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

②  $A = x^3 - x^2 + x + 2$ ,  $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$

③  $A = x^3 - x^2 + x - 2$ ,  $B = -2x^3 - x^2 + 3x + 7$

④  $A = x^3 - x^2 - x + 2$ ,  $B = -2x^3 - x^2 + 5x + 3$

⑤  $A = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ ,  $B = -4x^3 + x^2 + x - 1$

해설

$$A + B = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 \cdots \text{㉠}$$

$$2A - B = 4x^3 - x^2 - x + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$(\text{㉠} + \text{㉡}) \div 3 : A = x^3 - x^2 + x + 2$$

$$(2\text{㉠} - \text{㉡}) \div 3 : B = -2x^3 - x^2 + 3x + 3$$

2.  $(-2x^3 + x^2 + ax + b)^2$ 의 전개식에서  $x^3$ 의 계수가  $-8$ 일 때,  $a - 2b$ 의 값은?

- ①  $-6$     ②  $-4$     ③  $-2$     ④  $0$     ⑤  $2$

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b + 2a)x^3$$

$$2a - 4b = -8$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

3.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ 에 대하여  $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 일 때, 상수  $A \times B \times C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠은  $x$ 에 대한 항등식이므로 양변에  $x = 0, 1, 2$ 를 차례로 대입하면,

$$x = 0 \text{ 일 때, } -1 = C$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } 5 = 1 + A + B + C$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 5 = 8 + 4A + 2B + C$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$A = -6, B = 11, C = -1$$

4. 다음 식  $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$  을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4      ② -32      ③ -64      ④ 32      ⑤ 64

**해설**

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우

$x = 1$  을 대입한다.

$$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$$

5. 다항식  $f(x)$ 에 대하여,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ,  $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때,  $f(x)$ 를  $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답:  $12x-3$

해설

구하는 나머지를  $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면  $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$  구하는 나머지는  $12x-3$

6.  $x$ 에 다항식  $f(x)$ 를  $x-2$ 로 나누면 나머지가 5이고,  $x-3$ 으로 나누면 나머지가 9이다. 이 다항식을  $(x-2)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

①  $x-1$

②  $2x+3$

③  $4x-3$

④  $4x+3$

⑤  $3x-1$

해설

나머지 정리에서  $f(2) = 5, f(3) = 9$   
 $f(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$  라 놓으면,  
 $f(2) = 2a + b = 5, f(3) = 3a + b = 9$ 을  
연립하여 풀면  $a = 4, b = -3$   
 $\therefore$  나머지는  $4x - 3$

7.  $x^6 + 1$ 을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

- ①  $x^2 + x + 1$       ②  $x^2 - x + 1$       ③  $x^2 + \sqrt{3}x + 1$   
④  $x^2 + \sqrt{3}x - 1$       ⑤  $x^2 - 1$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3 + 1 \\ &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 - 3x^2) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)\end{aligned}$$

8. 다음 중 다항식  $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$ 의 인수인 것은?

- ①  $x + y + 2$       ②  $x - y + 2$       ③  $x + 2y + 1$   
④  $x - 2y + 1$       ⑤  $x + y + 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + (2y + 1)(y - 2) \\ &= (x + 2y + 1)(x + y - 2) \end{aligned}$$

9. 삼각형 ABC의 세변의 길이  $a, b, c$  사이에  $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ①  $b = c$ 인 이등변 삼각형
- ②  $a = c$ 인 이등변삼각형
- ③  $b$ 가 빗변의 길이인 직각삼각형
- ④ 정삼각형
- ⑤  $c$ 가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \quad (\because a+b \neq 0) \\ \therefore c &\text{가 빗변의 길이인 직각삼각형}\end{aligned}$$

10. 임의의 두 다항식  $A, B$ 에 대하여 연산  $*$ 를  $A * B = A^2 + B^2 - A - B$ 라 할 때, 다음 중  $(x+1) * X = 2(x+1)^2$ 을 만족하는 다항식  $X$ 는?

- ①  $x-1$                       ②  $x+2$                       ③  $2(x-2)$   
④  $2(x+3)$                       ⑤  $(x+1)(x-2)$

**해설**

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.

$$x^2 + x + X^2 - X = 2x^2 + 4x + 2$$

$$X^2 - X = x^2 + 3x + 2,$$

$$[X - (x+2)][X + (x+1)]$$

따라서  $X = x+2$  또는  $X = -x-1$

11. 두 이차식의  $x^2 + ax + 2b$ ,  $x^2 + bx + 2a$  최대공약수가 일차식일 때  $a + b$  의 값은?

- ① 0      ② 2      ③ -2      ④ 4      ⑤ 9

해설

일차식은 최대공약수를  $x - \alpha$  라 놓으면  
두 다항식은 각각  $x - \alpha$  로 나누어 떨어지므로  
 $a^2 + a\alpha + 2b = 0 \cdots \text{㉠}$   
 $a^2 + b\alpha + 2a = 0 \cdots \text{㉡}$   
 $\text{㉠} - \text{㉡}$  하면  $(a - b)\alpha - 2(a - b) = 0$   
 $\therefore (a - b)(\alpha - 2) = 0$   
 $a = b$  이면 두 다항식이 같게 되어 조건이 어긋난다.  
따라서  $\alpha = 2$  일 때 이 값을 ㉠에 대입하면  
 $\therefore a + b = -2$

12.  $x^2 + x - 1 = 0$  일 때,  $x^5 - 5x$  의 값을 구하면?

- ① 2      ② 1      ③ 0      ④ -1      ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$  를  $x^2 + x - 1$  로 나누면  
즉,  $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$   
 $x^2 + x - 1 = 0$   
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

13. 세 변의 길이가  $a, b, c$  인  $\triangle ABC$ 에 대하여  $a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때,  $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서,  $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

14.  $x - \frac{1}{x} = 1$  일 때,  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  의 값은 ?

①  $\pm 6\sqrt{5}$

②  $\pm 5\sqrt{5}$

③  $\pm 3\sqrt{5}$

④  $\pm 2\sqrt{5}$

⑤  $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ = \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

15. 다항식  $f(x)$ 를  $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ 라 하면 나머지는 5이고, 몫  $Q(x)$ 를 다시  $x+3$ 으로 나누면 나머지가 3이다. 이때,  $f(x)$ 를  $x+3$ 으로 나눈 나머지는?

① 10      ② -10      ③ 9      ④ -9      ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해  $f(x)$ 를  $x+3$ 으로 나눈 나머지는  $f(-3)$ 이다.  
 $f(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서  
 $x = -3$ 을 대입하면  $f(-3) = (-3-2)Q(-3) + 5$   
 $Q(x)$ 를  $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로  $Q(-3) = 3$   
 $\therefore f(-3) = -10$

16.  $x$ 에 관한 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는  $2x + 1$ 이고,  $g(x)$ 를  $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는  $x - 4$ 이다. 이 때,  $(x+2)f(x) + 3g(x+1)$ 을  $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① 7      ② 9      ③ 13      ④ 17      ⑤ 23

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1 \text{에서 } f(2) = 5 \\ g(x) &= (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4 \text{에서 } g(3) = -1 \\ h(x) &= (x+2)f(x) + 3g(x+1) \text{이라 놓으면,} \\ h(x) &\text{를 } x - 2 \text{로 나눈 나머지는} \\ h(2) &= 4f(2) + 3g(3) = 17 \end{aligned}$$

17.  $\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 31

해설

$$\begin{aligned} 2^5 = x \text{라 두면} \\ \frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1} &= \frac{x^8 - x^7 - x + 1}{x^7 - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1} \\ &= x-1 = 2^5-1 = 31 \end{aligned}$$

18. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가  $\sqrt{77}$ 인 직육면체의 겉넓이는?

- ① 88      ② 100      ③ 124      ④ 148      ⑤ 160

해설

직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각  $x, y, z$ 라고 하면

$$4(x + y + z) = 60 \text{에서 } x + y + z = 15$$

또, 대각선의 길이는

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{77} \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 77$$

이 때, 직육면체의 겉넓이는  $2(xy + yz + zx)$ 이고

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{이므로}$$

$$77 = 15^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 225 - 77 = 148$$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

19. 두 다항식  $2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a$ ,  $x^3 + 2x^2 - x - 2$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수  $a$ 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $a = -2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$   
 $f(x) = 2x^3 + (a-2)x^2 + ax - 2a$ 라 하면  
 $f(1) = 0$ 이므로  $f(x)$ 는  $x-1$ 을 인수로 갖는다.  
최대공약수가 이차식이므로  $f(x)$ 는  $x+1$   
또는  $x+2$ 를 인수로 가져야 한다.  
 $f(-2) = -8 - 4a - 8 - 4a \neq 0$ 이므로  
 $x+1$ 이 인수이다.  
 $\therefore f(-1) = 0$ 일 때  $a = -2$

20.  $n$ 이 자연수일 때  $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를  $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가  $4^n(x + 2)$ 가 되도록  $a, b$ 의 값을 정할 때,  $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-7$

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

한편,  $x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

21.  $2003^{10}$ 를 2002와 2004로 나눈 나머지가 각각  $a, b$ 일 때,  $a - b$ 의 값은?

- ① 0      ② 1      ③ -1      ④ 2      ⑤ -2

해설

2002를  $x$ 라 하면,  $2003^{10} = (x+1)^{10}$   
 $(x+1)^{10} = xQ(x) + a$   
 $(x+1)^{10} = (x+2)Q(x) + b$   
나머지 정리에 의해  
 $x = 0, x = -2$ 를 각각 대입하면,  
 $a = 1, b = 1$   
 $\therefore a - b = 0$

22.  $a, b$  가 양의 정수이고, 다항식  $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$  이다.  $f(x)$  가 일차식  $x - \alpha$  를 인수로 갖게 하는 정수  $\alpha$  의 값과  $a, b(a > b)$  의 값에 대하여  $\alpha^2 + a^2 + b^2$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\alpha$  가 될 수 있는 상수항  $-2$ 의 약수인  $\pm 1, \pm 2$ 을 준식에 차례로 대입해 보면

$$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0, a + b = 0$$

$$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0, 4a + b = -9$$

$$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0, 4a + b = 9$$

그런데, 위의 세 식은  $a, b$ 가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 이고 } 4a + b = 9$$

$$\alpha = -2, a = 2, b = 1 (\because a > b)$$

$$\therefore \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$$