1. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2$, $B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2$, $B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2$, $B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2$, $B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6$, $B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

2. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$의 전개식에서 x^3의 계수가 -8일 때, $a-2b$의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

3. $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$에 대하여 $f(x-1)=x^3+Ax^2+Bx+C$일 때, 상수$A\times B\times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)^2+2(x-1)+5$$
$$=x^3+Ax^2+Bx+C\cdots㉠$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,

$x=0$일 때, $-1=C$

$x=1$일 때, $5=1+A+B+C$

$x=2$일 때, $5=8+4A+2B+C$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A=-6,\ B=11,\ C=-1$

4. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우
$x = 1$을 대입한다.
$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$

5. 다항식 $f(x)$에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$일 때, $f(x)$를 $(2x-1)(3x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$을 각각 양변에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$구하는 나머지는 $12x-3$

6. x에 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 5이고, $x-3$으로 나누면 나머지가 9이다. 이 다항식을 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $x-1$　② $2x+3$　③ $4x-3$

④ $4x+3$　⑤ $3x-1$

해설

나머지 정리에서 $f(2)=5,\ f(3)=9$

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ 라 놓으면,

$f(2)=2a+b=5,\ f(3)=3a+b=9$을

연립하여 풀면 $a=4,\ b=-3$

$\therefore$ 나머지는 $4x-3$

7. x^6+1을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2+x+1 ② x^2-x+1 ③ $x^2+\sqrt{3}x+1$

④ $x^2+\sqrt{3}x-1$ ⑤ x^2-1

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3+1 \\ &= (x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ &= (x^2+1)\{(x^2+1)^2-3x^2\} \\ &= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)\end{aligned}$$

8. 다음 중 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$의 인수인 것은?

① $x+y+2$ ② $x-y+2$ ③ $x+2y+1$

④ $x-2y+1$ ⑤ $x+y+1$

해설

$$\begin{aligned}&x^2+3xy+2y^2-x-3y-2\\&=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2\\&=x^2+(3y-1)x+(2y+1)(y-2)\\&=(x+2y+1)(x+y-2)\end{aligned}$$

9. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형

② $a=c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)\\
&= (a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0
\end{aligned}
$$

$a^2+b^2=c^2\ (\because\ a+b\neq 0)$

$\therefore$ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

10. 임의의 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $*$를 $A*B=A^2+B^2-A-B$라 할 때, 다음 중 $(x+1)*X=2(x+1)^2$을 만족하는 다항식 X는?

① $x-1$ ② $x+2$ ③ $2(x-2)$

④ $2(x+3)$ ⑤ $(x+1)(x-2)$

해설

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.

$x^2+x+X^2-X=2x^2+4x+2$

$X^2-X=x^2+3x+2,$

$[X-(x+2)][X+(x+1)]$

따라서 $X=x+2$ 또는 $X=-x-1$

11. 두 이차식의 $x^2+ax+2b$, $x^2+bx+2a$ 최대공약수가 일차식일 때 $a+b$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ -2 ④ 4 ⑤ 9

해설

일차식은 최대공약수를 $x-\alpha$ 라 놓으면
두 다항식은 각각 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어지므로
$\alpha^2+a\alpha+2b=0\cdots$ ㉠
$\alpha^2+b\alpha+2a=0\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ 하면 $(a-b)\alpha-2(a-b)=0$
$\therefore\ (a-b)(\alpha-2)=0$
$a=b$ 이면 두 다항식이 같게 되어 조건이 어긋난다.
따라서 $\alpha=2$ 일 때 이 값을 ㉠에 대입하면
$\therefore\ a+b=-2$

12. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned}x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x\\ &= x(-x+1)^2-5x\\ &= x^3-2x^2-4x\\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x\\ &= -x^2-x-2\\ &= -(x^2+x)-2\\ &= -1-2=-3\end{aligned}$$

13. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

14. $x - \dfrac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ 의 값은?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$x^5 + \dfrac{1}{x^5} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ 에서

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3$ 에서

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = 5$

$\therefore\ x + \dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5}$

$\therefore\ x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$

15. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

16. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　② 9　③ 13　④ 17　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

17. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} = \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}$$
$$= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}$$
$$= x-1 = 2^5-1 = 31$$

18. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

19. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로
$x+1$이 인수이다.
$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

20. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots①$

$x=-2$를 대입하면,

$4^n(4-2a+b)=0\quad\therefore\ b=2a-4\cdots②$

②를 ①에 대입하면

$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2+a)$

$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n\quad\therefore -4+a=1\quad\therefore\ a=5$

②에서 $b=6\quad\therefore\ a-2b=-7$

21. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10}=(x+1)^{10}$

$(x+1)^{10}=xQ(x)+a$

$(x+1)^{10}=(x+2)Q(x)+b$

나머지 정리에 의해

$x=0,\ x=-2$를 각각 대입하면,

$a=1,\ b=1$

$\therefore a-b=0$

22. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ±1, ±2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b\ )$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$