1. 집합 $A_k = \left\{x \mid x\text{는 } k\text{의 배수}\right\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A_2 \cap A_4 \cap A_{16} = A_{16}$　② $A_3 \cup A_6 \cup A_9 = A_3$

③ $A_4 \cup A_{12} = A_4$　④ $A_6 \cup A_{12} = A_6$

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_9$

해설

⑤ $A_9 \cap A_{18} = A_{18}$

2. x, y가 실수일 때, 다음 중 조건 p가 조건 q의 필요충분 조건인 것은?

① $p : x+y \geq 4$, $q : x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$

② $p : x+y$는 유리수, $q : x$, y는 모두 유리수

③ $p : xy > x+y > 4$, $q : x > 2$이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$이고 $y > 1$

⑤ $p : |x| > |y|$, $q : x > y$

해설

① 충분조건
② 필요조건
③ 필요조건
⑤ 아무 조건 아님

3. 모든 실수 x, y 에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$ 가 성립하기 위한 실수 k 의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$　② 4　③ $2\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

ⅰ) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$

$\therefore k \ge 1 \cdots$ ㉠

ⅱ) $y \ne 0$ 일 때 양변을 y^2 으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$ 를 t 로 치환하면

$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$

$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$ ㉡

㉡ 식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k \ne 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$

$\therefore k \ge 4 \cdots$ ㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 t 에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 k 의 범위는 $k \ge 4$

4. 양수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z=6$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}$의 최솟값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$

$=(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$

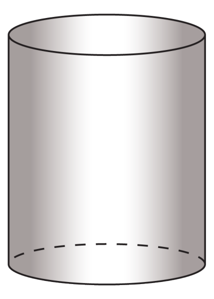
$=3+\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{2y}{3z}\right)+\left(\frac{x}{3z}+\frac{3z}{x}\right)$

$\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{2y}{3z}}+2\sqrt{\frac{x}{3z}\cdot\frac{3z}{x}}$

$=9$ (단, 등호는 $x=2y=3z=2$ 일 때 성립)

$\therefore$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}$ 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$

5. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원

④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,

부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠

철판의 넓이를 S라 하면

$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$

$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$

단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$일 때,

곧 $x = 2$일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

6. 분수식 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$ 을 간단히 하면 $\dfrac{\boxed{}}{x^4+x^2+1}$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 식은?

① x^4 ② $2x^4$ ③ $-x^4$ ④ $-2x^4$ ⑤ $-4x^4$

해설

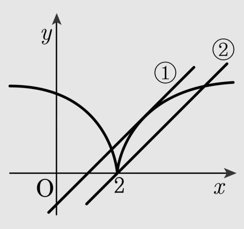
$$\frac{x^3}{x^2+x+1}-\frac{x^3}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{x^3(x-1)}{x^3-1}-\frac{x^3(x+1)}{x^3+1}$$
$$=\frac{x^3(x-1)(x^3+1)-x^3(x+1)(x^3-1)}{x^6-1}$$
$$=\frac{x^3(x^4+x-x^3-1-x^4+x-x^3+1)}{x^6-1}$$
$$=\frac{x^3(-2x^3+2x)}{x^6-1}$$
$$=\frac{-2x^4(x^2-1)}{x^6-1}$$
$$=\frac{-2x^4}{x^4+x^2+1}$$

7. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$　② $-2 < k \le -\frac{7}{4}$　③ $-2 \le k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \le k \le -\frac{7}{4}$　⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$ 의 개형은



와 같고

$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$x + k = \sqrt{x-2}$에서
$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$
$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$
$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x + k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2 + k$
$k = -2$

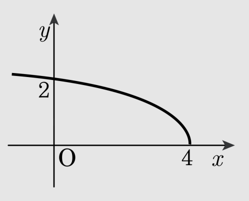
$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$

8. 두 집합 $A = \{(x,\ y) \mid y = \sqrt{4-x}\}$, $B = \{(x,y) \mid y = mx+1, m$ 은 실수$\}$에 대하여 $n(A \cap B) = 2$ 일 때, m의 값의 범위를 구하면?

① $-\frac{1}{2} \le m < 0$　　② $-\frac{1}{3} \le m < 0$　　③ $-\frac{1}{4} \le m < 0$
④ $-\frac{1}{5} \le m < 0$　　⑤ $-\frac{1}{6} \le m < 0$

해설

$y = \sqrt{4-x}$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y = mx + 1$ 은 점 $(0,1)$ 을 지나고 교점이 두 개이기 위해서는 $m < 0$ 이고 직선이 점 $(4,0)$ 을 지날 때가 최소이므로

$m = -\frac{1}{4}$

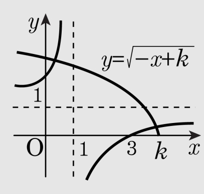
$\therefore -\frac{1}{4} \le m < 0$

9. 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ 과 $y=\sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{-2}{x-1}+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

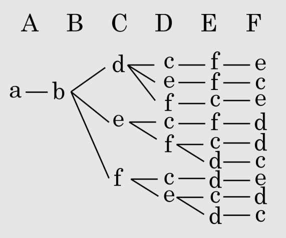
$k\ge 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3 이다.

10. 수험생 6 명의 수험표를 섞어서 임의로 1 장씩 나누어 줄 때 6 명 중 어느 2 명이 자기 수험표를 받을 경우의 수를 구하면?

① 60가지　② 85가지　③ 120가지
④ 135가지　⑤ 145가지

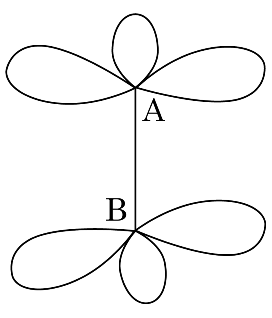
해설

A, B, C, D, E, F 의 6 명과 수험표를 a, b, c, d, e, f 라 하고 수형도를 그린다.



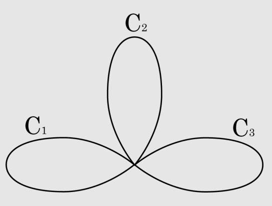
$\therefore$ (A, B) 두 명만이 자기 수험표를 받는 경우의 수가 9 가지이고, 또 2 명이 자기 수험표를 받는 경우의 수는 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 가지이다.
$\therefore$ 모든 경우의 수는 $9 \times 15 = 135$(가지)

11. 다음 그림과 같이 도형을 그리는데 연필을 떼지 않고 한 번에 그리는 방법의 수는? (A 또는 B 에서 시작한다.)



① 4588　② 4592　③ 4600　④ 4608　⑤ 4612

해설



A 에서 B 로 가는 방법의 수를 생각한다.

C_1, C_2, C_3 의 순으로 그리는 방법 :

각각을 시계 방향, 반시계 방향으로 그릴 수 있으므로

$2 \times 2 \times 2 = 8$

C_1, C_2, C_3 를 선택하여 배열하는 방법의 수 : $3! = 6$

따라서 $(8 \times 6)^2 = 2304$

그런데 B 에서 A 로 그리는 방법도 있으므로

$2304 \times 2 = 4608$

12. 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6 개의 상자와 6 개의 공이 있다. 한 상자에 하나씩 임의로 공을 담을 때, 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 상자의 수가 3 개인 경우의 수는?

① 20　② 30　③ 40　④ 50　⑤ 60

해설

6 개의 상자 중에서 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 3 개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ (가지) 이다.
이때, 예를 들어 선택된 상자가 1, 2, 3 이라 하면 나머지 4, 5, 6 상자는 공에 적힌 숫자와 모두 달라야 하므로 4, 5, 6 상자에 각각 (5, 6, 4) 또는 (6, 4, 5) 의 공이 차례로 들어가야 하므로 2 가지 경우가 있다.
그런데 나머지 경우에 대하여도 각각 2 가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$ (가지)

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 A 에서 A 로의 함수 f 의 개수는?

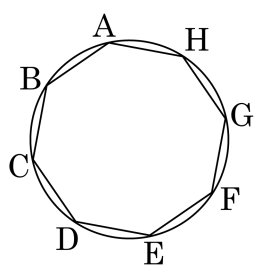
㉠ 함수 f 는 일대일대응이다.
㉡ $f(1) = 5$ 이다.
㉢ $a \geq 2$ 이면 $f(a) \leq a$ 이다.

① 4　　② 8　　③ 16　　④ 32　　⑤ 64

해설

조건 ㉢에 의해 $f(2) \leq 2$ 이므로 $f(2)$ 를 정하는 방법의 수는 ${}_2C_1$
조건 ㉠, ㉢에 의해 $f(3) \leq 3$, $f(3) \neq f(2)$ 이므로 $f(3)$ 를 정하는 방법의 수는 ${}_2C_1$
같은 방법으로 $f(4)$ 를 정하는 방법의 수도 ${}_2C_1$ 이고, $f(5)$ 를 정하는 방법의 수는 1
$\therefore\ {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 8$

14. 원에 내접하는 팔각형에서 세 개의 꼭짓점을 이을 때 만들어지는 삼각형을 다음과 같이 구하고자 한다.



팔각형과 한 변을 공유하는 삼각형의 개수는 a 개, 팔각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 b 개, 따라서 팔각형과 한 변도 공유하지 않는 삼각형의 개수는 c 개이다. 위의 과정에서 $a+b-c$ 의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

해설

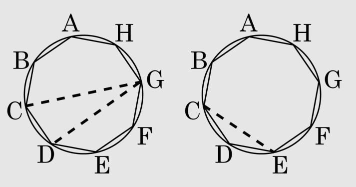
한 변을 공유하는 경우는 한 변마다 꼭짓점이 4 개씩 있으므로,

$4\times 8=32$(개) $\Rightarrow$ $a=32$

두 변을 공유하는 경우는 꼭짓점 한 개에 한 개씩 모두 8 (개) $\Rightarrow$ $b=8$

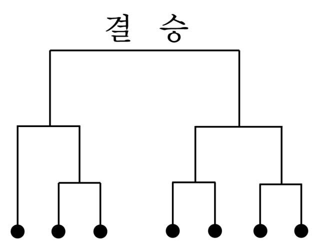
따라서 변을 공유하지 않는 삼각형은

${}_8C_3-32-8=16$ $\Rightarrow$ $c=16$



$\therefore$ $a+b-c=32+8-16=24$

15. 7 개의 팀이 아래 그림과 같이 한 개 팀에게 부전승을 허용하여 토너먼트 방식으로 경기를 하려고 한다. 시합을 하는 방법의 수는?



① 315 ② 378 ③ 396 ④ 412 ⑤ 446

해설

7 개의 팀을 4 팀, 3 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_4 \times {}_3C_3 = 35$ (가지)

아래 왼쪽 조를 완성하는 방법의 수는

${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3$ (가지)

아래 오른쪽 조를 완성하는 방법의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$ (가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $35 \times 3 \times 3 = 315$ (가지)