

1. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2. 양수 x, y 에 대하여 $\sqrt{2} + 1, x, \sqrt{2} - 1, y$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x + y$ 의 값은?

① $-2\sqrt{2}$

② $1 - 2\sqrt{2}$

③ $4 - 2\sqrt{2}$

④ $1 + 2\sqrt{2}$

⑤ $4 + 2\sqrt{2}$

해설

x 는 $\sqrt{2} + 1$ 과 $\sqrt{2} - 1$ 의 등비중항이므로

$x^2 = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ 이므로

$\therefore x = 1$ ($\because x > 0$)

따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2} - 1$ 이므로

$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4 - \sqrt{2}$

3. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

- ① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right) \\ &= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66 \end{aligned}$$

4. 등차수열을 이루는 세 수에 대하여 세 수의 합이 15이고, 제곱의 합은 91일 때, 세 수의 곱은?

① 85 ② 90 ③ 95 ④ 100 ⑤ 105

해설

세 수를 $5-d$, 5 , $5+d$ 라 할 수 있다.

$$(5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 91$$

$$75 + 2d^2 = 91$$

$$2d^2 = 16$$

$$d = \pm 2\sqrt{2}$$

(i) $d = 2\sqrt{2}$ 일 때

$$\text{세 수 : } 5 - 2\sqrt{2}, 5, 5 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (5 - 2\sqrt{2}) \times 5 \times (5 + 2\sqrt{2})$$

$$= (25 - 8) \times 5 = 17 \times 5 = 85$$

(ii) $d = -2\sqrt{2}$ 일 때

$$\text{세 수 : } 5 + 2\sqrt{2}, 5, 5 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (5 + 2\sqrt{2}) \times 5 \times (5 - 2\sqrt{2})$$

$$= (25 - 8) \times 5 = 85$$

$$\therefore 85$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 28$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 175

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 4a + 48d = 28$

$$a = 7 - 12d$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}$$

$$= \frac{25\{2(7 - 12d) + (25 - 1)d\}}{2} = 175$$

6. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

- ① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33 - 17 + 1)(51 + 99)}{2}$$

$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

7. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$ 으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$ 의 음수인 항의 합은?

① -75 ② -76 ③ -77 ④ -78 ⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 25n) - \{2(n-1)^2 - 25(n-1)\} \\ &= 4n - 27 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 \text{ 이므로 } a_1 = -23$$

(i), (ii) 에서 $a_n = 4n - 27$ ($n \geq 1$)

한편, $a_n = 4n - 27 < 0$ 에서 $n < \frac{27}{4} = 6.75$

따라서 첫째항부터 제 6 항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2} \{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\} = -78$$

8. 서로 다른 세 실수 $9, a, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, 9, b$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $-\frac{45}{2}$ ② $-\frac{48}{2}$ ③ $-\frac{41}{2}$ ④ $-\frac{39}{2}$ ⑤ $-\frac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 $9, a, b$ 가 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{9+b}{2} \dots\dots\textcircled{1}$$

세 수 $a, 9, b$ 가 등비수열을 이루므로

$$9^2 = ab \dots\dots\textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$81 = \frac{9+b}{2} \cdot b, b^2 + 9b - 162 = 0$$

$$(b+18)(b-9) = 0$$

$$\therefore b = -18 \text{ 또는 } b = 9$$

$$\text{즉, } b = -18 \text{ 일 때 } a = -\frac{9}{2} \text{ 이고, } b = 9 \text{ 일 때 } a = 9$$

이때, a, b 는 서로 다른 실수이므로

$$a = -\frac{9}{2}, b = -18$$

$$\therefore a + b = -\frac{45}{2}$$

9. 수열 $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

- ①

$\frac{2a + 4r^n}{r}$
- ②

$\frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$
- ③

$\frac{a(1+r) + (1+r)^n}{r}$
- ④

$\frac{a(1+r)\{(1+r)^{2n} - 1\}}{r}$
- ⑤

$\frac{a(1+r) - r^n + 2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} \\ &= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r} \end{aligned}$$

10. 두 수 A, B 에 대하여 $A = 2^{10}$, $B = 5^{10}$ 일 때, 두 수 A, B 의 곱 AB 의 양의 약수의 총합을 A 와 B 의 식으로 나타낸 것은?

① $(2A + 1)(5B + 1)$

② $(5A - 1)(5B - 1)$

③ $\frac{1}{4}(2A + 1)(5B - 1)$

④ $\frac{1}{4}(2A - 1)(5B - 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A - 1)(5B - 1)$

해설

$$AB = 2^{10} \cdot 5^{10}$$

따라서 AB 의 양의 약수의 총합은

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10})(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{10})$$

$$= \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} \times \frac{5^{11} - 1}{5 - 1}$$

$$= (2 \cdot 2^{10} - 1) \times \frac{1}{4}(5 \cdot 5^{10} - 1)$$

$$= (2A - 1) \times \frac{1}{4}(5B - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(2A - 1)(5B - 1)$$

11. $S = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k$ 일 때, $\frac{1}{5}S$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad + 3 + 4 + \cdots + 10 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 10 \\ &= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \\ \therefore \frac{1}{5}S &= 77 \end{aligned}$$

12. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 1155 - 110 \\ &= 1045 \end{aligned}$$

13. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은?

① 82

② 84

③ 86

④ 88

⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\} \\ &= 4n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

14. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(2k+1)}$ 의 값은?

① 8

② $\sqrt{99} - 1$

③ 9

④ $\sqrt{99} + 1$

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} f(2x+1) &= \sqrt{2x+1 + \sqrt{(2x+1)^2 - 1}} \\ &= \sqrt{2x+1 + \sqrt{4x^2 + 4x}} \\ &= \sqrt{(x+1) + x + 2\sqrt{(x+1) \cdot x}} \\ &= \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \\ \frac{1}{f(2x+1)} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99} \\ &= \sqrt{100} - 1 \\ &= 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

15. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

- ① $\frac{40}{7}$
- ② $\frac{45}{8}$
- ③ $\frac{17}{3}$
- ④ $\frac{57}{10}$
- ⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 옳므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

16. $\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

k 에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \left\lfloor \frac{2^k}{10} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2^1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^4}{10} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{10}}{10} \right\rfloor \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 12 + 25 + 51 + 102 = 200\end{aligned}$$

17. 수열 1, 2, 5, 10, 17, 26, ... 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

1, 2, 5, 10, 17, 26

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
 1 3 5 7 9

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$$a_n = n^2 - 2n + 2$$

$$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$$

18. 오른쪽 그림과 같이 연속한 자연수 1, 2, 3, ... 을
나열할 때, 위에서 5 번째 행의 왼쪽에서 11 번째 열의
수는?

1	4	9	16	...
2	3	8	15	
5	6	7	14	
10	11	12	13	
⋮				⋮

- ① 113 ② 114 ③ 116 ④ 117 ⑤ 119

해설

수열로 표시하면
(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), ...
로 묶을 수 있으며 제 n 군의 끝항은
 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 이므로 위에서 5 번째 행, 왼쪽에서
11 번째 열의 수는 제 11 군의 끝항에서 5 번째에 있는 수이다.
 $\therefore 11^2-4=117$

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉞]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,
(좌변) $= 3$, (우변) $= 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots$ ㉠ 이다.
㉠의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 [㉞]일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

- ① $n = -k + 1$ ② $n = -k + 2$ ③ $n = k + 1$
- ④ $n = k + 2$ ⑤ $n = 2k + 1$

해설

㉞의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면
 $3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3)$
 $= k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$
이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

20. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 4$, (우변) $= 2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면 $4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면 $4^{k+1} \leq \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
 $= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$
 $= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

21. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.
- ② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.
- ③ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개다.
- ④ n 이 짝수일 때, 16의 n 제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.
- ⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

해설

$x^n = a$ 인 실수 x 의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 실수 x 는 $\sqrt[n]{a}$ 로 1개이다.

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x 는 $\pm \sqrt[n]{a}$ 로 2개이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x 는 0이므로 1개이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x 는 존재하지 않는다.

① $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

② $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

③ n 이 홀수이므로 실수인 n 제곱근은 1개

④ n 이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 2개

⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 존재하지 않는다.

22. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$ ② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$ ③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$ ④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$ ⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}} \end{aligned}$$

23. $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3 \\ = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 24 \end{aligned}$$

24. $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$ 일 때, $\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$

⑤ $\frac{7}{6}$

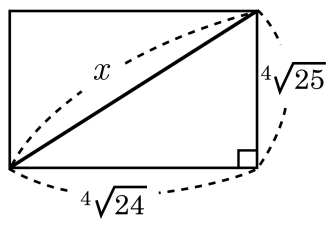
해설

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2 \text{ 에서 } a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x}) \text{ 이므로}$$

$$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore a^{2x} = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

25. 가로와 세로의 길이가 각각 $\sqrt[4]{24}$, $\sqrt[4]{25}$ 인 직사각형의 대각선의 길이는?



- ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ② $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ③ 3
 ④ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\sqrt[4]{24})^2 + (\sqrt[4]{25})^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{24} + \sqrt{25}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{6} + 5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \\ \therefore x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

26. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}$ 의 값은?

① $\frac{2^{20}}{5}$

② $\frac{2^{21} + 5}{4}$

③ $\frac{2^{21} - 5}{3}$

④ 2^{20}

⑤ $2^{21} - 5$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2) \\ S_1 &= 2^2 - 3 = 1 \text{ 이므로} \\ \therefore a_n &= 2^n (n \geq 2), a_1 = 1 \\ a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} &= 1 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{19} \\ &= 1 + \frac{2^3 \{(2^2)^9 - 1\}}{4 - 1} \\ &= 1 + \frac{2^{21}}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2^{21}}{3} \end{aligned}$$

27. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$ 이 성립하고 $a_6 = 62$ 라 할 때, $a_1 + a_2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$$

$$\therefore 3a_1 + 5a_2 = 62$$

a_1, a_2 의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$ 이므로

$$a_1 = 4, a_2 = 10$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 14$$

28. $\sqrt{7} = 100$ 일 때, $\frac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 값은? (단, n 은 양의 정수이다.)

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{4}{5}$
- ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\sqrt{7} = 100$ 의 양변을 n 제곱하면

$$7 = 100^n = 10^{2n}$$

$\frac{10^n - 10^{-n}}{10^n + 10^{-n}}$ 의 분자와 분모에 10^n 을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{(10^n - 10^{-n})10^n}{(10^n + 10^{-n})10^n} &= \frac{10^{2n} - 1}{10^{2n} + 1} \\ &= \frac{7 - 1}{7 + 1} \\ &= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

29. $\log_{10} 91000 = a$, $\log_{10} 0.0011 = b$ 라 할 때, $\log_{10} \frac{91}{11}$ 을 a , b 로 나타내면?

- ① $-a + b + 7$ ② $a - b - 7$ ③ $a - b + 1$
④ $\frac{b+4}{a-3}$ ⑤ $\frac{a-3}{b+4}$

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 91000 &= 3 + \log_{10} 91 = a \\ \therefore \log_{10} 91 &= a - 3 \\ \log_{10} 0.0011 &= -4 + \log_{10} 11 = b \\ \therefore \log_{10} 11 &= b + 4 \\ \therefore \log_{10} \frac{91}{11} &= \log_{10} 91 - \log_{10} 11 \\ &= a - 3 - (b + 4) = a - b - 7\end{aligned}$$

30. 어느 나라의 인구는 2014년부터 5년간 전년도에 비해 매년 10% 씩 감소하였는데, 이 나라 정부의 지속적인 출산 장려 정책의 효과로 2019년부터는 전년도에 비해 매년 5% 씩 증가할 것이 예상된다고 한다. 이와 같은 추세로 인구가 계속 증가세를 보일 때, 처음으로 2014년의 인구보다 많아지려면 최소 몇 년간 증가해야 하는가? (단, $\log 3 = 0.4771, \log 1.05 = 0.0212$ 이다.)

- ① 17년
- ② 15년
- ③ 13년
- ④ 11년
- ⑤ 9년

해설

2014년의 인구를 T 라 할 때 5년 후 인구는 $T \times 0.9^5$
또, 올해부터 전년도에 비해 매년 5% 씩 n 년간 증가한 후 인구는 $T \times 0.9^5 \times 1.05^n$ 이므로
 $T \times 0.9^5 \times 1.05^n \geq T$
 $5 \log 0.9 + n \log 1.05 \geq 0$
 $5(2 \times 0.4771 - 1) + n \times 0.0212 \geq 0$
 $n \geq \frac{2290}{212} \approx 10.8$
따라서 최소 11년간 증가해야 한다.

31. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염물질에 대한 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다.

현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염물질이 있다. 또한 매년 $\frac{50}{3}$ 톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 때, 이 오염물질들은 매년 광산화 (햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10%씩 줄어든다. ... (이하 생략)

- ① 152톤
- ② 162톤
- ③ 172톤
- ④ 182톤
- ⑤ 192톤

해설

지금부터 n 년 후 호수에 남아 있는 오염물질의 양을 a 톤이라고 하면 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} a_1 = \left(250 + \frac{50}{3}\right) \times 0.9 = 240 \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{50}{3}\right) \times 0.9 = 0.9a_n + 15 \end{cases}$$

$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$ 를 변형하면
 $a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$ 이므로
수열 $\{a_n - 150\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 150 = 240 - 150 = 90$ 이고, 공비가 0.9인 등비수열이다.

즉,
 $a_n - 150 = 90(0.9)^{n-1}$
 $\therefore a_n = 90(0.9)^{n-1} + 150$
따라서 지금부터 20년 후 호수에 남아 있는 오염물질의 양은
 $a_{20} = 90(0.9)^{19} + 150 = 90 \times 0.135 + 150 = 162.5$ (톤)

32. 실수 a 에 대하여 $[a]$ 는 a 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 다음 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x 의 값의 곱을 M 이라 할 때, $\log_{10} M^4$ 의 값을 구하여라.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad [\log_{10} x] = 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad \log_{10} x - \log_{10} \frac{1}{x^3} = [\log_{10} x] - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

조건 ㉠에서 $[\log_{10} x] = 1$ 이므로 $\log_{10} x$ 의 지표는 1이다.
 $\therefore 1 \leq \log_{10} x < 2$

조건 ㉡에서 $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \log_{10} \frac{1}{x^3} - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$ 이므로

$\log_{10} x$ 와 $\log_{10} \frac{1}{x^3}$ 의 가수가 같다

즉, $\log_{10} x + 3 \log_{10} x = (\text{정수})$
 $\therefore 4 \log_{10} x = (\text{정수})$
 ㉠에서 $4 \leq 4 \log_{10} x < 8$

$4 \log_{10} x = 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$

$\therefore x = 10, 10^{\frac{5}{4}}, 10^{\frac{6}{4}}, 10^{\frac{7}{4}}$

따라서, x 의 값을 모두 곱하면

$M = 10^{1+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4}} = 10^{\frac{14}{2}}$

$\therefore \log_{10} M^4 = 22$

33. 6개월에 5%의 이율로 복리로 계산하는 예금에 5년 간 예치하여 찾을 때 원리합계는 원금의 몇 배인지 구하여라. (소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하고, 아래의 상용로그표를 이용하여라.)

수	0	1	2	3	4	5	...	비례부분								
								1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	...	...	.0086	.0128	.0170	.0212	...	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.6	...	...	.2095	.2122	.2148	.2175	...	3	5	8	11	13	16	18	21	27

▶ 답 :

▷ 정답 : 1.63

해설

처음 예금을 a 원이라 하면
6개월 후 예금 : $1.05a$
12개월 후 예금 : $1.05 \times 0.05a = 1.05^2a$
:
60개월 후 예금 : $1.05^{10}a$
즉 1.05^{10} 을 구하면 된다.
 $\log 1.05^{10} = 10 \times \log 1.05$
 $= 10 \times 0.0212$
 $= 0.212$
그런데 $\log 1.62 = 0.2095$
 $\log 1.63 = 0.2122$ 이므로
 $x : 0.01 = 0.0025 : 0.0027 \quad \therefore x = 0.0092 \approx 0.009$
 1.05^{10} 을 $1.62 + 0.009 \approx 1.629 \approx 1.63$
따라서 원리합계는 원금의 1.63배이다.