

1. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 4017

해설

(준식) $= |-2014| + (-2015) = -1$

2. 등식 $\sqrt[4]{a\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}=27$ 을 만족하는 양수 a 의 값은?

① 3

② 3^2

③ 3^3

④ 3^6

⑤ 3^9

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} &= \left\{a\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a \cdot a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = 3^3 \text{ 이므로 } \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (3^3)^3$$

$$\therefore a = 3^9$$

3. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$$

$a = 2^{12}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$$

4. 세 수 $\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $2^{\frac{1}{12}}$

② $3^{\frac{1}{6}}$

③ $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

④ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$

⑤ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

해설

$$\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}2^{\frac{1}{6}} = (3^4 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}}(3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{3^4 \times 2}{2^3 \times 3^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

5. $3^{\frac{5}{2}} \cdot \left(9^{\frac{7}{4}} + 27^{\frac{3}{2}}\right) \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$ 를 계산하면?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} & 3^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-6} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{-6} \\ &= 3^{\frac{5}{2} + \frac{7}{2} - 6} + 3^{\frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 6} = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

6. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$ 로 계산할 때, $10^a = 275$ 를 만족하는 a 의 값은?

① 2.34 ② 2.38 ③ 2.42 ④ 2.46 ⑤ 2.50

해설

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69} \text{ 이므로}$$

$$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$$

$$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$$

$$\therefore a = 2.42$$

7. $\sqrt[3]{a} = 81$, $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 225

해설

$$\sqrt[3]{a} = 81 = 3^4 \text{ 에서 } a = 3^{12}$$

$$\sqrt{\sqrt{b}} = 125, \sqrt[4]{b} = 5^3 \therefore b = 5^{12}$$

$$\text{이때, } ab = 3^{12} \cdot 5^{12} = 15^{12}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}} &= \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{15^{12}} \\ &= 15^{\frac{12}{6}} = 15^2 = 225 \end{aligned}$$

8. $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}})$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}})$$

$$= \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)$$

$$= \log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2} = \log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{\frac{3}{2}} = 3$$

9. $\log_{10} 2 = 0.301$ 일 때,
 $\frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49}$ 의 값은?
- ① 3.01 ② 6.02 ③ 6.99 ④ 9.03 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \frac{10(\log_{10} 0.8 - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} 0.7 + \log_{10} 7 - \log_{10} 49} \\ &= \frac{10(\log_{10} \frac{8}{10} - \log_{10} 32 + \log_{10} 8)}{\log_{10} \frac{7}{10} + \log_{10} 7 - \log_{10} 49} \\ &= \frac{10 \log_{10} (\frac{8}{10} \times \frac{1}{32} \times 8)}{\log_{10} (\frac{7}{10} \times 7 \times \frac{1}{49})} \\ &= \frac{10 \log_{10} \frac{2}{10}}{\log_{10} \frac{1}{10}} = \frac{10(\log_{10} 2 - 1)}{\log_{10} 10^{-1}} \\ &= \frac{10(0.301 - 1)}{-1} = 6.99 \end{aligned}$$

10. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7133

해설

상용로그표에서 $\log 1.38 = 0.1399$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.138} &= \frac{1}{3} \log 0.138 = \frac{1}{3} \log (1.38 \times 10^{-1}) && \text{따 라 서} \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.38 - 1) = \frac{1}{3}(0.1399 - 1) \\ &= -0.2867 = -1 + 0.7133\end{aligned}$$

$\log \sqrt[3]{0.138}$ 의 소수 부분은 0.7133이다.

11. $\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 -3 인 자연수 A 의 개수는? (단, $\sqrt{10} = 3.16$ 으로 계산한다.)

- ① 15개 ② 18개 ③ 21개 ④ 24개 ⑤ 27개

해설

$\log \frac{1}{A^2}$ 의 정수 부분이 3이므로

$$-3 \leq \log \frac{1}{A^2} < -2, -3 \leq -2 \log A < -2$$

$$1 < \log A \leq \frac{3}{2}, \log 10 < \log A \leq \log 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore 10 < A \leq 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10} = 31.6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $31 - 10 = 21(\text{개})$

12. 양수 A 의 상용로그의 정수 부분이 2일 때, 등식 $\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수는?

① 56 ② 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60

해설

$$\log \frac{A}{2} = 2\log 2\sqrt{2} + \log n \text{에서}$$

$$\log A - \log 2 = 2\log 2\sqrt{2} + \log n$$

$$\log A = \log 2 + 2\log 2\sqrt{2} + \log n = \log 2 + \log 8 + \log n = \log 16n$$

$$A = 16n$$

그런데, 양수 A 의 상용로그의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log A < 3, 10^2 \leq A < 10^3$$

$$\therefore 100 \leq 16n < 1000$$

$$6.25 \leq n < 62.5$$

따라서 자연수 n 의 개수는 $62 - 6 = 56$ 이다.

13. 상용로그 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이고, 상용로그 $\log B$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $3x^2 - 4kx - 3 = 0$ 의 두 근일 때, $\frac{A}{B}$ 의 값은? (단, k 는 상수)

- ① $10^{-\frac{5}{6}}$ ② $10^{-\frac{1}{6}}$ ③ $10^{\frac{5}{6}}$ ④ $10^{\frac{7}{6}}$ ⑤ $10^{\frac{11}{6}}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면
 n 과 α 는 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이므로
 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -\frac{3}{2}, \quad n\alpha = \frac{k}{2}$$

$$n + \alpha = -2 + \frac{1}{2} \text{ 이므로 } n = -2, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = 2n\alpha = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = -2$$

따라서 이차방정식 $3x^2 + 8x - 3 = 0$ 에서

$$(x + 3)(3x - 1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log B = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore A = 10^{-\frac{3}{2}}, B = 10^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = 10^{-\frac{3}{2} + \frac{8}{3}} = 10^{\frac{7}{6}}$$

14. $\lfloor \log 1 \rfloor + \lfloor \log 2 \rfloor + \lfloor \log 3 \rfloor + \cdots + \lfloor \log 2014 \rfloor$ 의 값은? (단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2007 ② 3515 ③ 4914 ④ 4935 ⑤ 7826

해설

(i) $1 \leq n < 10$ 일 때, $0 \leq \log n < 1$ 이므로 $\lfloor \log n \rfloor = 0$
(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때, $1 \leq \log n < 2$ 이므로 $\lfloor \log n \rfloor = 1$
(iii) $100 \leq n < 1000$ 일 때, $2 \leq \log n < 3$ 이므로 $\lfloor \log n \rfloor = 2$
(iv) $1000 \leq n < 10000$ 일 때, $3 \leq \log n < 4$ 이므로 $\lfloor \log n \rfloor = 3$
(i), (ii), (iii), (iv) 에서
 $\lfloor \log 1 \rfloor + \lfloor \log 2 \rfloor + \lfloor \log 3 \rfloor + \cdots + \lfloor \log 2014 \rfloor$
 $= 0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 900 + 3 \times 1015 = 4935$

15. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log(2^x + 1) = \log 3 + \log(2^x + 7)$$

$$\log(2^x + 1)^2 = \log 3(2^x + 7) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3(2^x + 7)$$

$$2^x = t \text{로 치환 } (t + 1)^2 = 3(t + 7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$$

$$(t + 4)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

16. $a > 0$ 이고 $t = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})$ 일 때, $(t + \sqrt{t^2 + 1})^3$ 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

- ① a^2 ② a ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\sqrt{a}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$$\begin{aligned} t + \sqrt{t^2 + 1} &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{3}} - 2 + a^{-\frac{2}{3}}) + 1} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + 2 + a^{-\frac{1}{3}})^2} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^2} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) = a^{\frac{1}{3}} \\ \therefore (t + \sqrt{t^2 + 1})^3 &= (a^{\frac{1}{3}})^3 = a \end{aligned}$$

17. 네 수 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$ 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 이들이 각각 세 모서리의 길이가 되는 직육면체를 만들려고 한다. 이와 같은 방법으로 만든 직육면체의 부피의 최솟값은?

- ① $\sqrt[12]{460}$
 ② $\sqrt[12]{680}$
 ③ $\sqrt[12]{880}$
- ④ $\sqrt[6]{680}$
 ⑤ $\sqrt[6]{880}$

해설

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[12]{(2\sqrt{2})^4} = \sqrt[12]{64}$
 $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$
 $\sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$
 $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{11^2} = \sqrt[12]{121}$
 $\therefore \sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[3]{\sqrt{11}} < \sqrt[4]{5}$
 그러므로 세 모서리의 길이가 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$ 일 때,
 직육면체의 부피가 최소이다.
 따라서 구하는 부피의 최솟값은
 $\sqrt[12]{8^2 \times 10^2 \times 11^2} = \sqrt[6]{8 \times 10 \times 11} = \sqrt[6]{880}$

18. $\log x$ 의 정수 부분이 5이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라고 하면

$$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(5 + \alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 + \frac{1 + \alpha}{2}$$

이때 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$$1 \leq 1 + \alpha < 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1 + \alpha}{2} < 1$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1 + \alpha}{2}$ 이다.

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\alpha + \frac{1 + \alpha}{2} = 1, \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

그러므로 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

19. 두 자연수 a, b 에 대하여 a^2 은 7자리의 수이고, ab^3 은 20자리의 수라고 할 때, a 와 b 는 각각 몇 자리 자연수인가?

① 3, 6 ② 3, 7 ③ 4, 6 ④ 4, 7 ⑤ 5, 4

해설

$$\log a^2 = 6 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log a = 3 + \frac{\alpha}{2}$$

a 는 4자리 자연수

$$\log ab^3 = \log a + 3 \log b$$

$\log b = n + \beta$ (n 은 정수, $0 \leq \beta < 1$) 이라 하면

$$\log a + 3 \log b = 3 + \frac{\alpha}{2} + 3(n + \beta)$$

$$= 3 + 3n + \frac{\alpha}{2} + 3\beta$$

$$\log ab^3 = 3(1 + n) + \frac{\alpha}{2} + 3\beta \text{에서}$$

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{\alpha}{2} + 3\beta < \frac{1}{2} + 3 \text{ 인데}$$

지표가 19이므로

$$19 \leq 3(1 + n) + \frac{\alpha}{2} + 3\beta < 20$$

$$\therefore 3(1 + n) = 18, \frac{\alpha}{2} + 3\beta - 1 \text{ 이 가수}$$

$$n = 5$$

$\therefore \log b$ 는 6자리 자연수

20. 3^{222} 은 p 자리의 정수이고, 최고 자리의 숫자는 q , 일의 자리의 숫자는 r 이다. 이때, $p+q+r$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

- ① 121 ② 123 ③ 125 ④ 127 ⑤ 129

해설

$$\log^{222} = 222 \log 3 = 222 \times 0.4771 = 105.9162$$

$\log^{222}$ 의 지표가 105이므로 3^{222} 는 106 자리의 정수이다.

$$\therefore p = 106$$

이때

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$$

$$\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$$

$$\text{이므로 } \log 8 < 0.9162 < \log 9$$

$$105 + \log 8 < 105.9162 < 105 + \log 9$$

$$\log(8 \times 10^{105}) < 3^{222} < \log(9 \times 10^{105})$$

따라서 3^{222} 의 최고 자리의 숫자는 8이다. ($q = 8$)

$$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots \text{이므로}$$

3^n 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복된다.

$$222 = 4 \times 55 + 2 \text{이므로 } 3^{222} \text{의 일의 자리의 숫자는}$$

$$3^2 \text{의 일의 자리의 숫자와 같은 } 9 \text{이다. } (r = 9)$$

$$\text{따라서 } p + q + r = 106 + 8 + 9 = 123$$