

1. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겹넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{29}$ ③ $\sqrt{33}$ ④ 6 ⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$2(ab + bc + ca) = 52$$

$$4(a + b + c) = 36 \rightarrow a + b + c = 9$$

(직육면체 대각선의 길이)

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$= \sqrt{81 - 52} = \sqrt{29}$$

2. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

3. $f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면 $f(x) =$

$$(x^2-3x+2)Q(x) + ax + b$$

그런데 $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ 이므로

$$a + b = 3, \quad 2a + b = 5$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 1$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

4. $2x^3 + 9x^2 + 11x + 7 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 가 x 에 대한 항등식일 때, a, b, c, d 를 차례로 구하면?
- ① 3, -1, 3, 2 ② 2, 3, -1, 3
③ -3, 1, -3, -2 ④ -2, -3, 1, -3
⑤ 1, -3, 4, -2

해설

조립제법을 이용하면

-1	2	9	11	7	
		-2	-7	-4	
-1	2	7	4	3	← d
		-2	-5		
-1	2	5	-1		← c
		-2			
	2	3			← b
	↑				
	a				

$a = 2, b = 3, c = -1, d = 3$

5. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 아닌 것은?

- ① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 3$ ④ $x + 3$ ⑤ $x + 2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x + 3) = 0$$

※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0이 되는 정수를 찾아본다.

6. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

- ① 75 ② 125 ③ 900 ④ 1000 ⑤ 1225

해설

$$\begin{aligned} 125^2 - 75^2 &= (125 + 75)(125 - 75) \\ &= 200 \times 50 = 10000 \end{aligned}$$

$$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + 5 = 10 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준 식}) = 10000 \div 10 = 1000$$

7. $2^{16} - 1$ 은 1과 10 사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 임을 이용하여 $2^{16} - 1$ 을 인수분해하면
 $2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1^2$
 $= (2^8 + 1)(2^8 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1)$
 $= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$
 $= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3$
따라서 $2^{16} - 1$ 을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10 사이의 수
즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

8. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2} \\ &= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x - 1}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

9. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x - y + z = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, 4c + 6b = 0, 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

10. 두 다항식 $x^3 + px^2 + qx + 1$ 과 $x^3 + qx^2 + px + 1$ 의 최대공약수가 x 에 대한 일차식일 때, 상수 p, q 에 대하여 $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A = x^3 + px^2 + qx + 1, B = x^3 + qx^2 + px + 1$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} A - B &= (x^3 + px^2 + qx + 1) - (x^3 + qx^2 + px + 1) \\ &= (p - q)x^2 - (p - q)x \\ &= (p - q)x(x - 1) \end{aligned}$$

이 때, $A - B$ 는 두 다항식 A, B 의 최대공약수를 인수로 갖는다. 그런데, $p = q$ 이면 $A = B$ 가 되어 최대공약수가 x 에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x 에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.

또한, 두 다항식 A, B 의 상수항이 모두 1 이므로 x 를 인수로 가질 수 없다.

따라서, $x - 1$ 이 두 다항식 A, B 의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B 의 인수이므로 $x = 1$ 을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0 이어야 한다.

$$1 + p + q + 1 = 0, 1 + q + p + 1 = 0$$

$$\therefore p + q = -2$$

11. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
 - ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
 - ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
 - ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
 - ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\begin{aligned} \frac{a-b+c}{a+b+c} &= \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{에서} \\ (a-b+c)(a-b-c) &= (a+b+c)(-a-b+c) \\ (a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) &= 0 \\ (\text{좌변}) \\ &= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\ &= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 \\ \text{따라서, } 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 &= 0 \text{ 이므로 } a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 } c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

12. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$\begin{aligned} 2f(x) - g(x) &= (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ g(x) &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.} \\ \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{이고 } R(10) = 24$$

13. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

$$(\text{준식}) = (k-a)(k-b)(k-c) + abc$$

$$= k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc + abc$$

$$= k \{ k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) \}$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (\because a+b+c=k)$$

14. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ㉠

빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ㉡

빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ㉢

빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ㉤

$a = b$ 인 이등변삼각형
- ㉥

$b = c$ 인 이등변삼각형

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$$
에서
$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$
$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$
$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$
$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$
$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$
$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

15. 두 다항식 $x^2 - x + p$ 와 $x^3 + x^2 + x + (p + 3)$ 이 사차의 최소공배수를 갖도록 p 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

다항식 A, B 의 최소공배수를 L , 최대공약수를 G 라 하면

$AB = GL$ 에서 G 는 1차식이다.

$\therefore$ 최대공약수는 $x + 1$

$x = -1$ 을 대입하면

$$2 + p = 0$$

$$\therefore p = -2$$