1. $X = \{x \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid -3 \le y \le 3\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = ax + b$ (단, $a > 0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = \frac{3}{2},\ b = 0$　② $a = \frac{1}{2},\ b = 0$　③ $a = \frac{3}{2},\ b = 1$
④ $a = \frac{5}{2},\ b = 0$　⑤ $a = 2,\ b = 0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \frac{3}{2},\ b = 0$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 24 개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

3. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{5}{6}$　③ 1　④ 2　⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$
$=2ax+4\ \cdots$ ㉠
$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$
$=2ax+6a-1\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

4. 함수 $y = x^2 - 2x\ (x \geq 1\ )$의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x\ (x \geq 1)$

② $y = x^2 - 2x\ (x \leq 1)$

③ $y = \sqrt{x+1}\ (x \geq -1)$

④ $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \geq -1)$

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1\ (x \leq 1)$

해설

$y = x^2 - 2x$에서 $x^2 - 2x + 1 = y + 1$
$(x-1)^2 = y + 1,\ x - 1 = \sqrt{y+1}\ (\because x \geq 1)$
$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$
x와 y를 바꾸어 쓰면 $y = \sqrt{x+1} + 1$
이 때, 원래의 함수
$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1\ (x \geq 1\ )$의 치역
$\{y|y \geq -1\}$ 이
역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$의 정의역이 되므로
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1\ (x \geq -1)$

5. 두 집합 $X = \{-2, \ -1, \ 0, \ 1\}$, $Y = \{1, \ 3, \ 5, \ 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$를 $f(x) = 2x + 5$로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$의 값은 얼마인가?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a, \ f^{-1}(5) = b$로 놓으면
$f(a) = 1, \ f(b) = 5$
$f(x) = 2x + 5$이므로
$f(a) = 1$에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$
$f(b) = 5$에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$
$\therefore a + b = -2$

6. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3)=1$, $(f\circ f)(x)=x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

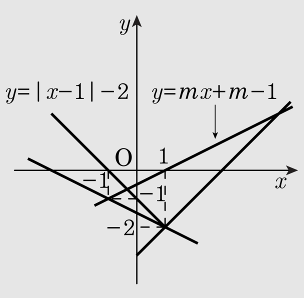
$(f\circ f)(x)=x$ 에서 $f=f^{-1}$
따라서 $f(3)=f^{-1}(3)=1$

7. 함수 $y = | x - 1 | - 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx + m - 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < m < 0$　② $-\frac{1}{2} < m < 1$　③ $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$
④ $0 < m < 1$　⑤ $1 < m < 2$

해설

$y = | x - 1 | - 2$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 점 $(1,\ -2)$ 에서 꺽인 그래프이다.
또, 직선 $y = mx + m - 1$ 은 $y = m(x + 1) - 1$ 에서 m 의 값에 관계 없이 점 $(-1,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.
따라서, 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기위한 조건은 $-\frac{1}{2} < m < 1$



8. 함수 $f(x) = || x - 1 | - a |$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로
$f(2) = || 2 - 1 | - a | = 4 \rightarrow | 1 - a | = 4$
따라서 $a = -3,\ 5$ 이므로 양수 $a = 5$

9. 함수 $y=\frac{1-2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동 시킨 것이다. 여기서 $k+a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y=\frac{-2x+1}{x-2}=\frac{-2(x-2)-3}{x-2}=\frac{-3}{x-2}-2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{-3}{x}$ 의
그래프를 x축의 방향으로 2만큼,
y축의 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이므로
$k=-3,\ a=2,\ b=-2$
$\therefore\ k+a+b=-3+2-2=-3$

10. 함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq a \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq -3 \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x-4 \geq 0$ 에서 $2x \geq 4$

$\therefore\ x \geq 2$

주어진 함수의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 2 \}$ 이므로

$a = 2$

함수 $y = \sqrt{2x-4} + b$ 의 치역은 $\{ y \mid y \geq b \}$ 이므로 $b = -3$

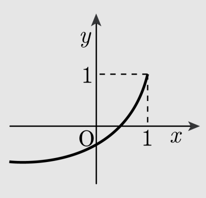
$\therefore\ ab = -6$

11. 다음중 함수 $y=-\sqrt{-2x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면 ③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면 ⑤ 제 3, 4 사분면

해설

$y=-\sqrt{-2(x-1)}+1$의 그래프는
$y = \sqrt{2x}$의 그래프를 원점에 대하여
대칭이동한
다음 x축의 방향으로 1 만큼,
y축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
그림과 같다. 따라서 함수의 그래프는
제 2 사분면을 지나지 않는다.



12. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14}-2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

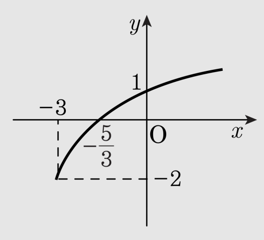
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

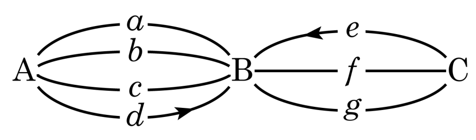
⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



13. 다음 그림과 같은 도로망에서 도로 d 와 e 는 화살표 방향으로 일방통행만 되고 그 외의 도로는 양쪽 방향으로 통행이 된다고 할 때, A 지점에서 출발하여 B 지점을 거쳐 C 지점까지 갔다가 다시 B 지점을 거쳐 A 지점까지 되돌아 오는 길의 가지수는?



① 12 개 ② 36 개 ③ 64 개

④ 72 개 ⑤ 144 개

해설

$A \to B,\ B \to C,\ C \to B,\ B \to A$ 의 길의 가지수는 각각 $4, 2, 3, 3$ 이므로 구하는 길의 가지수는 $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ (개) 이다.

14. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 초록은 제외하고 노랑은 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 10가지

해설

부분집합에서 집합의 개수를 구할 때처럼 초록과 노랑을 제외한 5개의 색 중에 3개를 뽑는 경우이므로 ${}_5C_3 = 10$

15. 5 명의 가족 중에서 아빠, 엄마를 포함하여 4 명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는?

① 35 ② 72 ③ 108 ④ 144 ⑤ 180

해설

3 명 중 2 명을 뽑은 후, 4 명을 일렬로 세우는 방법을 구한다.

$\therefore\ {}_3C_2 \times 4! = 72$

16. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$

$f^{-1}(8) = a$ 라 놓으면 $f(a) = 2a + 2 = 8$

$\therefore\ a = f^{-1}(8) = 3$

17. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분이 a, 소수 부분이 b라 할 때, $\frac{1}{b}-a$의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $3-\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=3-\sqrt{3}$
따라서 $a=1$, $b=2-\sqrt{3}(\because 1<\sqrt{3}<2)$
$\therefore \frac{1}{b}-a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1=1+\sqrt{3}$

18. $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}, b = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$b = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$a+b = \sqrt{6}, ab = 1$

$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

19. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동하면 점$(1,\ 3)$을 지난다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼
평행 이동한 함수의 그래프의 식은
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 함수의
그래프의 식은 $y = \sqrt{a(-x-2)}$
이 때, 이 그래프가 점$(1,\ 3)$을 지나므로
$3 = \sqrt{-3a},\ -3a = 9$
$\therefore\ a = -3$

20. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24개

21. 10명의 학생이 O, X 문제에 임의로 답하는 경우의 수는?

① 128 ② 256 ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

각 학생이 대답할 수 있는 가지 수가
2가지씩이므로 $\Rightarrow 2^{10} = 1024$

22. 540의 양의 약수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680

해설

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5)$
$=7\times40\times6=1680$

23. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

① 36　② 48　③ 60　④ 120　⑤ 240

해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2\times2\times2=8$ (가지)

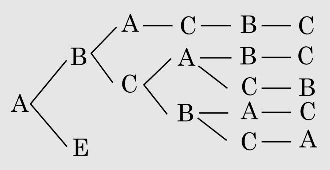
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는

$5\times8\times2=80$ (가지)

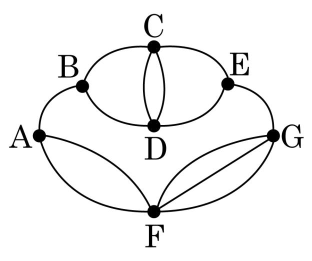
또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$80\times3=240$ (가지)



24. A, B, C, D, E, F, G 의 일곱 도시 사이에 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 같은 지점은 많아야 한 번 밖에 지날 수 없고 지나지 않는 도시가 있어도 될 때, A 에서 G 로 가는 경우의 수는?



① 6　② 8　③ 9　④ 12　⑤ 14

해설

(i) A 에서 B, E 를 경유해서 G 로 가는 방법은
$A \to B \to C \to E \to G$ 의 1 가지
$A \to B \to D \to E \to G$ 의 1 가지
$A \to B \to C \to D \to E \to G$ 의 2 가지
$A \to B \to D \to C \to E \to G$ 의 2 가지
$\therefore$ 6 (가지)
(ii) A 에서 F 를 경유해서 G 로 가는 방법
$2 \times 3 = 6$ (가지)
(i), (ii)가 동시에 발생할 수 없으므로
$6 + 6 = 12$ (가지)

25. 100 원짜리 1 개, 50 원짜리 2 개, 10 원짜리 3 개가 있다. 일부 또는 전부를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 때, 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합을 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 42 가지

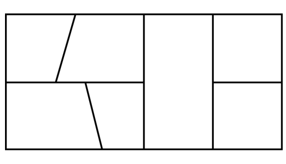
해설

① 100 원짜리 동전을 0 개, 1 개 사용할 수 있다. 2 가지
50 원짜리 동전을 0, 1, 2 개 사용할 수 있다. 3 가지
10 원짜리 동전을 0, 1, 2, 3 개 사용할 수 있다. 4 가지
따라서 지불 방법의 수는 $2 \times 3 \times 4 = 24$ 인데 이 중에서 0 개를 사용하는 것은 지불하는것이 아니므로 제외하면 23 가지의 지불 방법 수가 있다.

② 100 원짜리 동전을 50 원짜리 동전으로 교환하면 50 원짜리 동전이 4 개, 10 원짜리 동전이 3 개인 상황에서 지불 금액의 수는 $5 \times 4 = 20$ 가지 인데 이 중에서 서로 사용하지 않는 경우를 제외하면 19 가지이다.

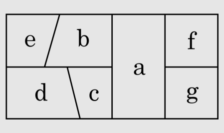
①, ②에서 구하는 지불 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수의 합은 $23+19=42$

26. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



① 4020　② 5160　③ 6480　④ 7260　⑤ 8400

해설



a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

27. 1 부터 999 까지의 자연수 중에서 각 자리에 7 인 숫자가 2 개 이상인 경우의 수는?

① 26 개 ② 27 개 ③ 28 개 ④ 29 개 ⑤ 30 개

해설

① 7 이 2 개 있는 수 : 77 이 1 개,
77□ 꼴이 9 개,
7□7 꼴이 9 개,
□77 꼴이 8 개
② 7 이 3 개 있는 수, 777 로 1 개
따라서 구하는 경우의 수는
$1 + 9 + 9 + 8 + 1 = 28$ (개)

28. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i ($1 \le i \le 4$)라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

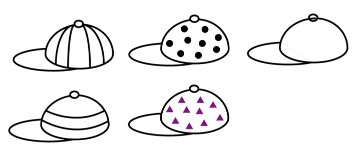
해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 9 가지

29. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33　② 36　③ 40　④ 45　⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_{n=}(n-1)(F_{n-1+}F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

30. n 권의 책이있다.(단, $n \ge 5$) 이 n 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

n 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로
${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42$ $\therefore$ $(n+6)(n-7) = 0$
한편, $n \ge 2$ 이므로 $n = 7$

31. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, B 와 C 가 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 12 가지

해설

B 와 C 를 하나로 보면, 세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.
$\Rightarrow 3! = 6$
여기에 B 와 C 가 자리를 바꾸는 방법을 곱해준다.
$\therefore\ 6 \times 2 = 12$

32. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, A 가 가장 뒤에 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 6 가지

해설

세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.

$3! = 6$

33. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$\therefore \dfrac{5!}{2!} = 60$

34. 7 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 에서 서로 다른 5 개의 숫자를 택하여 5 자리의 정수를 만들 때, 4 의 배수인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 624 개

해설

4 의 배수이려면 끝의 두자리 수가 4 의 배수이어야 하므로
5 자리 수의 숫자 배열은 다음 중 하나이다.

$\square\square\square$ 04 $\quad$ $\square\square\square$ 24
$\square\square\square$ 12 $\quad$ $\square\square\square$ 32
$\square\square\square$ 16 $\quad$ $\square\square\square$ 36
$\square\square\square$ 20 $\quad$ $\square\square\square$ 40
$\square\square\square$ 52
$\square\square\square$ 56
$\square\square\square$ 60
$\square\square\square$ 64

$\therefore$ 구하는 개수는 $4 \times {}_5P_3 + 8 \times ({}_5P_3 - {}_4P_2) = 240 + 384 = 624$

35. '*korea*' 의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 적어도 한 쪽 끝이 자음인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 84 개

해설

전체 경우의 수에서 양 쪽 끝이 모두 모음인 경우를 제외한다.

$5! - {}_3P_2 \times 3! = 84$

36. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 에서 $f(98)$의 값을 구하면?

① 80 ② 85 ③ 95 ④ 99 ⑤ 102

해설

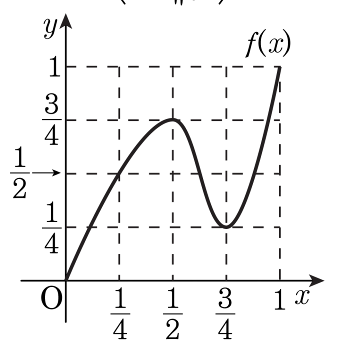
자연수 n에 대하여

$f(n) = \begin{cases} n-1 & (n \geq 100\text{일 때}) \\ f(f(n+2)) & (n < 100\text{일 때}) \end{cases}$ 이므로

$$f(98) = f(f(100)) = f(99) = f(f(101)) \\ = f(100) = 99$$

37. $R = \{x | 0 \le x \le 1\}$이라 할 때, R에서 R로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$: f 개수 n개)

〈그래프〉



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

① $\frac{99}{2}$　② $\frac{95}{2}$　③ $\frac{93}{2}$　④ $\frac{91}{2}$　⑤ $\frac{89}{2}$

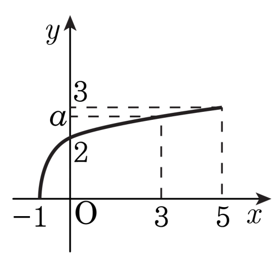
해설

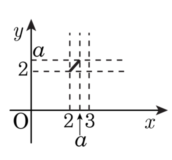
그래프에서$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $\cdots$ 이므로

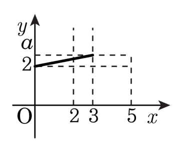
$f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$

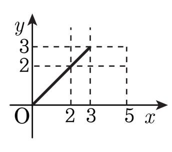
$\therefore\ f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

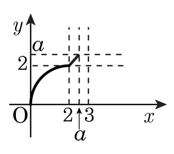
38. 실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?

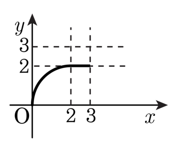


①


②


③


④


⑤


해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는
$y = f(x)$ $(0 \le x \le 3)$ 가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

39. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f : x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　　② $a > 1$　　③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$　　⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$

$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응이려면 $x \geq 1$에서 증가함수이므로 $x < 1$에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2 - 2a > 0$에서 $a < 1$

40. $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2+xy+y^2}=2$일 때, $\dfrac{3(x-y)}{x+y}$의 값을 구하면? (단, $x>y>0$)

① $2\sqrt{6}+3$　② $2\sqrt{6}-3$　③ $3-2\sqrt{6}$
④ $3+2\sqrt{6}$　⑤ $5-6\sqrt{2}$

해설

$3x^2-2xy=2x^2+2xy+2y^2$

$\therefore x^2-4xy-2y^2=0$이 식의 양변을 y^2으로 나누면

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\left(\dfrac{x}{y}\right)-2=0$

$\therefore \dfrac{x}{y}=2+\sqrt{6}$ ($\because$ $x>y>0$에서 $\dfrac{x}{y}>1$)

$\therefore \dfrac{3(x-y)}{x+y}=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}{\dfrac{x}{y}+1}=2\sqrt{6}-3$

41. 어떤 버스 회사에서 버스 요금을 a% 인상하면 승객의 수가 b% 감소되지만, 수입은 x% 증가한다고 한다. 이때, x를 a, b를 사용하여 나타내면?

① $x=\dfrac{(100+a)(100-b)}{100}$ ② $x=(100+a)(100-b)$

③ $x=\dfrac{a-b+1}{100}$ ④ $x=a-b-ab$

⑤ $x=a-b-\dfrac{ab}{100}$

해설

요금 인상 전의 버스 요금을 g, 승객의 수를 h라 하면 버스 회사 수입은 gh원이고 버스 요금을 a% 인상하면 승객의 수는 b% 감소된다.

인상 후의 버스 회사 수입은

$g\left(1+\dfrac{a}{100}\right)\times h\left(1-\dfrac{b}{100}\right)$

$=\dfrac{100+a}{100}\times\dfrac{100-b}{100}\times gh$(원) 이므로

$\dfrac{100+a}{100}\times\dfrac{100-b}{100}\times gh$

$=\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\times gh$

$(100+a)(100-b)=100(100+x)$

$\therefore\ x=a-b-\dfrac{ab}{100}$

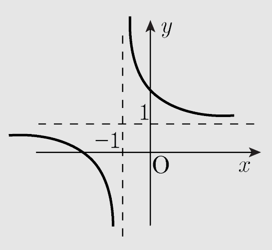
42. 분수함수 $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid y < 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 2\}$ ③ $\{y \mid y \leq -2\}$

④ $\{y \mid y \geq 2\}$ ⑤ $\{y \mid y \geq -2\}$

해설

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{(x+1)+2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$$



$x = 1$ 일 때, $y = \dfrac{1+3}{1+1} = 2$ 이므로,

치역은 $\{y \mid y \geq 2\}$

43. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$$
$$= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}}$$
$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$

$x^2 - 4x + 4 = 3$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$

44. 10 개의 직선이 있다. 이 중 3 개는 서로 평행하다. 그리고 어느 3 개도 같은 점에서 만나지 않는다. 이들 직선으로 만들어지는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 98 개

해설

삼각형은 세 개의 직선으로 결정되므로 10 개의 직선에서 3 개의 직선을 뽑을 경우의 수는 ${}_{10}C_3$ 가지이다. 이 중에서 평행한 세 개의 직선을 뽑거나, 평행한 두 개의 직선과 나머지 7 개의 직선 중에서 한 개의 직선을 뽑는 경우는 삼각형이 만들어 질 수 없다. 이런 경우의 수는
${}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1$ 가지이다.
따라서 삼각형의 개수는
${}_{10}C_3 - ({}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1) = 98$ (개)

45. 아시아 4 개국과 아프리카 4 개국이 있다. 8 개국을 2 개국씩 짝지어 4 개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4 개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 81 가지

해설

적어도 한 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지는 사건의 여사건은 아시아 국가만으로 이루어진 그룹이 하나라도 있으면 안 되므로, 아시아 1 개국과 아프리카 1 개국으로 모든 그룹이 이루어진다.

$\therefore {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$

$- \left\{ ({}_4C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1) \right.$

$\left. \times ({}_1C_1 \times {}_1C_1) \times \frac{1}{4!} \right\}$

$= \frac{28 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{16 \times 9 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = 105 - 24 = 81$

46. 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(2)=3$, $g(2)=4$ 이다.

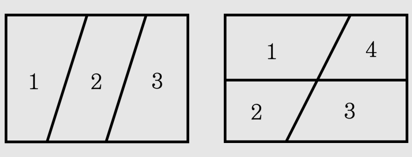
㉡ 모든 n 에 대하여 $f(n)=n+1$ 이다.

㉢ 모든 n 에 대하여 $g(n) \le f(n+1)$ 이다.

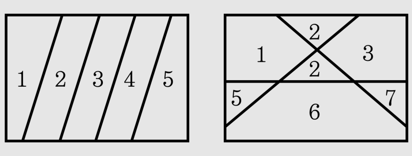
① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 

위의 그림에서 $f(2)=3$, $g(2)=4$ 이다. (참)

㉡ 

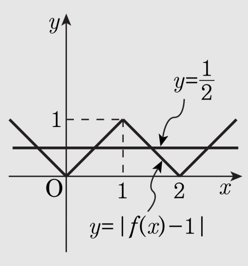
한 평면에서 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나뉘어진 영역의 수가 최소가 되는 것은 n 개의 직선이 평행일 때이다.
즉, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $\cdots$ 이므로 $f(n)=n+1$ (참)
㉢ [반례] $f(4)=5$, $g(3)=7$ 이므로 $g(3)>f(4)$ 이다.(거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

47. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x)=\dfrac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x)=|f(x)-1|$ 이므로
$y=|f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

48. $T_n = 1+2+3+\cdots+n$ 이라 하고, $P_n = \dfrac{T_2}{T_2-1} \times \dfrac{T_3}{T_3-1} \times \cdots \times \dfrac{T_n}{T_n-1}$ $(n \geq 2)$ 라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

① 2.0 ② 2.3 ③ 2.6 ④ 2.9 ⑤ 3.2

해설

$T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{T_n}{T_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 4} \times \frac{4\cdot 3}{2\cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1)\cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$\therefore P_{1991} = \dfrac{3\cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$

49. $\sqrt{x^2+5x+13}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=4$

해설

$x^2+5x+13$ 이 완전제곱수이려면
$(x+2)^2 < x^2+5x+13 < (x+4)^2$ 에서 $x^2+5x+13=(x+3)^2$
$\therefore\ x=4$

50. $a<0,\ b<0$ 이고 $x=\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$ 를 a, b 로 나타내면?

① $\dfrac{b}{a}$ ② $\dfrac{a}{b}$ ③ $\dfrac{b}{2a}$ ④ $-\dfrac{2a}{b}$ ⑤ $\dfrac{a}{2b}$

해설

$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}}$

$=\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}\ (\because\ a<0,\ b<0)$

$\therefore\ \sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}-\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{-a}{\sqrt{ab}}$

$\sqrt{1+x^2}+x=\dfrac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{-b}{\sqrt{ab}}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$