

1. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

2. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의
치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

- ① -1
- ② -2
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.
모든 원소를 제공하여 더하면
 $(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

3. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) - 2$$

$$\therefore f(1) = 2$$

㉠에 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

4. 집합 $X = \{-1, 1\}$ 을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R 를 공역으로 하는 함수 $f(x) = |x|, g(x) = ax - 2$ 에 대하여 $f(-1) = g(-1)$ 일 때, $a + g(1)$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$ 에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$
 $\therefore a = -3$
이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$
 $\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

5. 분수식 $\frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1}$ 를 간단히 한 것은?

- ① $\frac{(x+2)^2}{x^2-1}$ ② $\frac{(x-2)^2}{x^2+1}$ ③ $\frac{x(x+2)^2}{x^2+1}$
④ $\frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ ⑤ $\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + x^3 - x^2 + x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x^2 + 4x + 4)}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+2)^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

6. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

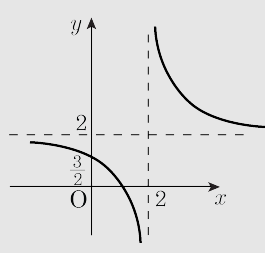
$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

7. 분수함수 $y = \frac{2x-3}{x-2}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

- ① $\left\{y \mid \frac{3}{2} < y < 2\right\}$ ② $\left\{y \mid \frac{3}{2} \leq y < 2\right\}$
 ③ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$ ④ $\left\{y \mid y \leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$
 ⑤ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

해설

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$



$x = 0$ 일 때, $y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ 이므로,

치역은 $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$

8. 함수 $y = \frac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6, y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+8}{x+b} = \frac{8-ab}{x+b} + a \text{ 이고}$$

점근선의 방정식이 $x = -b = 6, y = a = -1$ 이므로 $a = -1, b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

9. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

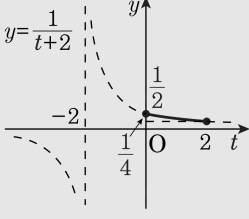
- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $0 \leq t \leq 2$ 이므로
주어진 함수는 $y = \frac{1}{t+2} (0 \leq t \leq 2)$

따라서 다음 그림에서 $t = 0$ 일 때
최댓값은 $\frac{1}{2}$,
 $t = 2$ 일 때
최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이므로
구하는 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



10. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2(x-1)}$, $g(x) = x+k$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

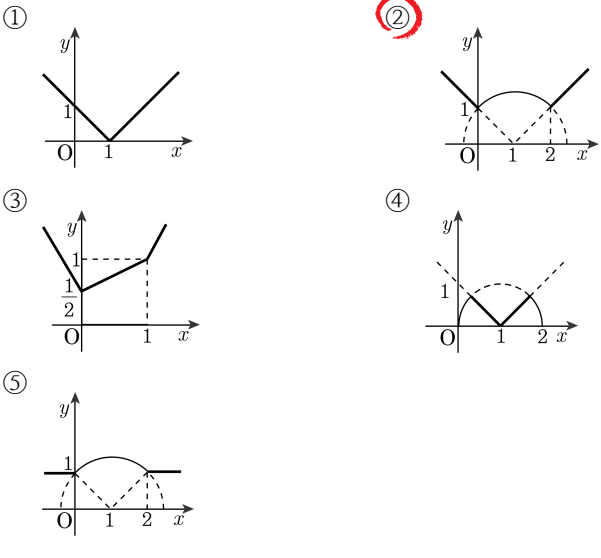
- ㉠ $f(x) \leq g(x)$ 이면 $k \geq -\frac{1}{2}$ 이다.
- ㉡ $k = \frac{1}{8}$ 이면 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 0 개이다.
- ㉢ $k < -1$ 이면 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 양수이다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

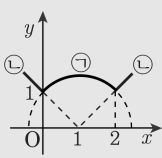
- ㉠ : $\sqrt{2(x-1)} \leq x+k$
 $x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 2 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 + 2) \leq 0$
 $k \geq -\frac{1}{2} \cdots$ 참
- ㉡ : ㉠에서 $k = \frac{1}{8}$ 이면
 $\frac{D}{4} < 0 \quad \therefore$ 해는 0개 .. 참
- ㉢ : ㉠에서 두근의 합이 $-2(k-1)$ 로 $k < -1$ 이면 양수이고,
 $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 2개의 실근을 가지므로 참이다.

11. 함수 $y = \sqrt{1 + |2x - x^2|}$ 의 그래프는 ?



해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$
즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,
 $0 \leq x \leq 2$
이 때, $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$ 의 양변을 제곱하면,
 $y^2 = 1 + 2x - x^2$ ($y \geq 0$)
 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$)㉠
(ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,
 $x < 0$ 또는 $x > 2$
이 때,
 $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$
 $= \sqrt{(x - 1)^2}$
 $= |x - 1|$ ㉡
(i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$

이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

- ① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t - 1$ 이므로

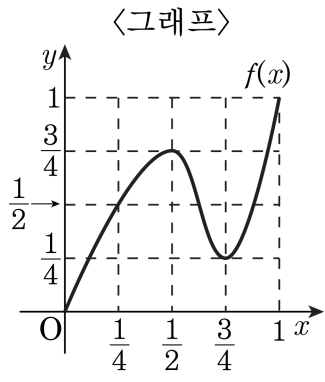
$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

13. $R = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 이라 할 때, R 에서 R 로의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.(단, $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) : f$ 개수 n 개)



이 때, $f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값을 구하면?

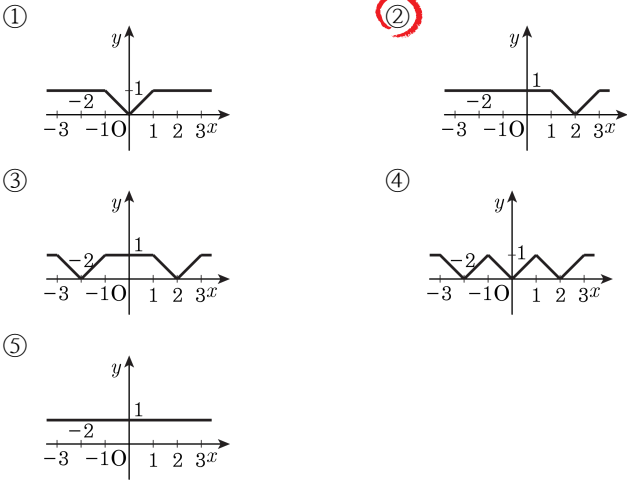
(단, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$)

- ① $\frac{99}{2}$ ② $\frac{95}{2}$ ③ $\frac{93}{2}$ ④ $\frac{91}{2}$ ⑤ $\frac{89}{2}$

해설

그래프에서 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f^3\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, ... 이므로
 $f^{3k+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f^{3k+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, $f^{3k+3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)
 $\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^{99}\left(\frac{1}{4}\right) = 33 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{2}$

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$ 의 그래프는 ?



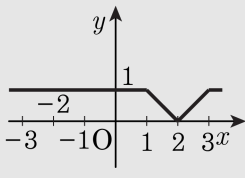
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = x - 2 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x - 2| \geq 1) \\ |x - 2| & (|x - 2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x - 2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



15. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

- ① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

16. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($x \geq 2$), $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} g(5) &= 4 \text{ 이므로 } g^{-1}(4) = 5 \\ (f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

17. ${}_nP_r = 360$, ${}_nC_r = 15$ 일 때, $n + r$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\Rightarrow r! = 24, r = 4$$

$${}_nP_4 = \frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3) = 360$$

$$\Rightarrow 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore n = 6$$

$$\text{따라서 } n + r = 10$$

18. ${}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9$ 의 값과 같은 것은?

- ① ${}_{11}C_6$
- ② ${}_{11}C_7$
- ③ ${}_{11}C_8$
- ④ ${}_{11}C_9$
- ⑤ ${}_{11}C_{10}$

해설

$$\begin{aligned} &{}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r \\ \text{따라서 } &{}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 \\ &= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 = {}_4C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_{10}C_9 \\ &\cdots = {}_{11}C_9 \end{aligned}$$

19. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

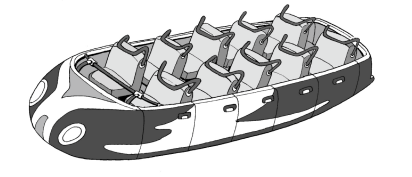
- ㄱ. ${}_3nC_{n-1} = {}_3nC_{2n+1}$
ㄴ. ${}_{4n}P_{3n} = (3n)! \times {}_{4n}C_n$
ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

㉠ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로
 ${}_3nC_{n-1} = {}_3nC_{3n-(n-1)} = {}_3nC_{2n+1}$ (참)
㉡ ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 에서
 ${}_nP_r = r! \times {}_nC_r$
 ${}_{4n}P_{3n} = (3n)! \times {}_{4n}C_{3n}$
 $= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n}$
 $= (3n)! \times {}_{4n}C_n$ (참)
㉢ ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ 이므로
 ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2}$
 $= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)}$
 $= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

20. 남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2 개의 의자가 있고 모두 5 줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2 명씩 같은 줄에 앉을 때, 4 명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 80 가지

해설

남학생을 A, B 라 하고, 여학생을 a, b 라 하면
짝을 이루는 방법은 $(Aa, Bb), (Ab, Ba)$ 두 가지가
있다. 이때, 5 줄 중 2 줄에 앉아야 하고 각 줄에서
남학생과 여학생이 자리를 바꿀 수 있으므로
 $2 \times {}_5C_2 \times 2 \times 2 = 80$

21. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 A 에서 A 로의 함수 f 의 개수는?

- ㉠ 함수 f 는 일대일대응이다.

㉡ $f(1) = 5$ 이다.

㉢ $a \geq 2$ 이면 $f(a) \leq a$ 이다.

- ① 4
- ② 8
- ③ 16
- ④ 32
- ⑤ 64

해설

조건 ㉢에 의해 $f(2) \leq 2$ 이므로 $f(2)$ 를 정하는 방법의 수는 ${}_2C_1$
조건 ㉠, ㉢에 의해 $f(3) \leq 3, f(3) \neq f(2)$ 이므로 $f(3)$ 를 정하는
방법의 수는 ${}_2C_1$
같은 방법으로 $f(4)$ 를 정하는 방법의 수도 ${}_2C_1$ 이고, $f(5)$ 를
정하는 방법의 수는 1
 $\therefore {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 8$

22. 8 명이 타고 있는 승강기가 2 층으로부터 11 층까지 10 개 층에서 설 수 있다고 한다. 이때, 각각 4 명, 2 명, 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 방법의 수는?

- ① 75600
- ② 84400
- ③ 92400
- ④ 12450
- ⑤ 151200

해설

8 명을 4 명, 2 명, 2 명씩 나누는 방법의 수는

${}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$ 이고,

이와 같이 3 개층에 내리게 되는 방법의 수는 ${}_{10}P_3$ 이다.

$\therefore {}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_{10}P_3 = 151200$

23. 서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 선물로 주려고 한다. 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주려고 할 때, 선물을 주는 방법의 수는?
- ① 500 가지 ② 540 가지 ③ 580 가지
④ 620 가지 ⑤ 660 가지

해설

서로 다른 여섯 권의 책을 세 사람에게 적어도 한 권 이상씩 주는 방법은 (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2) 의 세 가지 경우가 있다.

$(4, 1, 1) : {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90 \text{ (가지)}$

$(3, 2, 1) : {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 3! = 360 \text{ (가지)}$

$(2, 2, 2) : {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 3 = 90 \text{ (가지)}$

따라서, 구하는 방법의 수는 $90 + 360 + 90 = 540$ (가지)

24. 6 권의 서로 다른 책을 2 개, 2 개, 2 개로 나누어서 3 개의 서로 다른 가방 A, B, C 에 담을 때, 특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▶ 정답 : 30가지

해설

특정한 책 하나는 반드시 가방 A 에 담아야 하므로 나머지 5개의 책을 가방 A 에 1개, 가방 B 에 2개, 가방 C 에 2개를 나누어 담으면 된다.

따라서, 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 30 \text{ (가지)}$$

25. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x-2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)