

1. 다음 보기의 운동 경기 중 구기 종목이 모임을 집합 A 라고 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

보기

농구, 씨름, 양궁, 축구, 육상, 수영, 사이클, 유도, 레슬링, 복싱, 야구

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

구기 종목은 농구, 축구, 야구인 세 종목이다.
따라서 $n(A) = 3$ 이다.

2. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 를 구하면?

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{3, 5\}$ ④ $\{4, 8\}$ ⑤ $\{6, 8\}$

해설

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 이고 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6, 8\}$

3. 직선 $y = 2x - 5$ 를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 5$ 와 일치하였다. 이때, a, b 사이의 관계식은?

- ① $2a - b = 5$ ② $2a - b = -10$ ③ $2a + b = 5$
④ $2a + b = 10$ ⑤ $2a - b = 10$

해설

$y = 2x - 5$, x 축 방향으로 a , y 축 방향으로 b 만큼 이동시키면,
 $y - b = 2(x - a) - 5$
 $\Rightarrow y = 2x - 2a + b - 5$
 $\therefore -2a + b - 5 = 5$
 $\Rightarrow 2a - b = -10$

4. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

5. $x - 4 = 0$ 이 $x^2 + ax - 48 = 0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

6. 좌표평면 위의 두 점 A (1, -4), B (5, 8) 에 대하여 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?

① $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 160$ ② $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 160$

③ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 40$ ④ $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 40$

⑤ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 40$

해설

$\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 를 만족하는 점 P 의 자취는

두 점 A (1, -4), B (5, 8) 을 잇는

선분 AB 를 지름으로 하는 원이므로

이 원의 중심을 (a, b) 라 하면

$$a = \frac{1+5}{2} = 3, b = \frac{-4+8}{2} = 2$$

또, 반지름의 길이 r 는

$$r = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + \{8-(-4)\}^2}}{2} = 2\sqrt{10}$$

따라서, 점 P 의 자취의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 40$$

7. 직선 $(a-1)x - (a-2)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

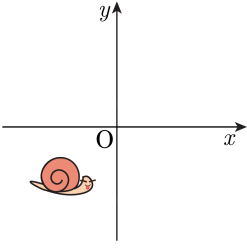
직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

따라서 원의 중심 $(1, 2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1) \times 1 - (a-2) \times 2 - 1 = 0$

$$\therefore a = 2$$

8. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답 : 분

▷ 정답 : 5 분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.

즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
 $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

9. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$, $B = \{1, 2, 3, a\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, a\}$
 $4 \in B$ 이어야 하므로 $a = 4$ 이다.

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 13

② 24

③ 25

④ 28

⑤ 36

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b) \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$

11. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

- (i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로
 $f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2-(2-x)\} = 2$
(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로
 $f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$
(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

12. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의
치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

13. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) - 2$$

$$\therefore f(1) = 2$$

①에 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

14. 집합 $X = \{-1, 1\}$ 을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R 를 공역으로 하는 함수 $f(x) = |x|, g(x) = ax - 2$ 에 대하여 $f(-1) = g(-1)$ 일 때, $a + g(1)$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$ 에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$
 $\therefore a = -3$
이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$
 $\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

15. 분수식 $\frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1}$ 를 간단히 한 것은?

- ① $\frac{(x+2)^2}{x^2-1}$ ② $\frac{(x-2)^2}{x^2+1}$ ③ $\frac{x(x+2)^2}{x^2+1}$
④ $\frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ ⑤ $\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + x^3 - x^2 + x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x^2 + 4x + 4)}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+2)^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

16. $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

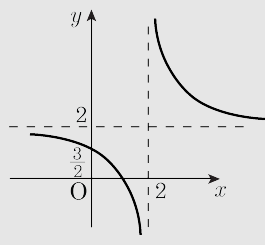
$\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면
 $xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로
 $2(xy + yz + zx) = 94k$, $\therefore xy + yz + zx = 47k$ 이므로
 $yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$
또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로
 $x^2 \cdot 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$
 $225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$
 $144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$
 $\therefore \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$

17. 분수함수 $y = \frac{2x-3}{x-2}$ 의 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을
바르게 구한 것은?

- ① $\left\{y \mid \frac{3}{2} < y < 2\right\}$ ② $\left\{y \mid \frac{3}{2} \leq y < 2\right\}$
 ③ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$ ④ $\left\{y \mid y \leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$
 ⑤ $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 2\right\}$

해설

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$



$x = 0$ 일 때, $y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ 이므로,

치역은 $\left\{y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y > 2\right\}$

18. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)