

1. 다음 방정식을 만족하는 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -5$

▷ 정답: $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x - 2y + 5 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = 2y - 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$\therefore y = 0$

$y = 0$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $x = -5$

$\therefore x = -5, y = 0$

2. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \dots \text{㉠} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x-y)(x-2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x-y)(x-2y) &= 0 \\ \Rightarrow x &= y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x &= y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x &= 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x+y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \dots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기

위한 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > \frac{3}{2}$
 ④ $a < \frac{3}{2}$ ⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \dots \textcircled{A} \\ ax-y=3 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 에서 $(a+1)x=5$
 $\therefore x = \frac{5}{a+1} \dots \dots \dots \textcircled{C}$
 \textcircled{C} 을 \textcircled{A} 에 대입하면 $\frac{5}{a+1} + y = 2$
 $\therefore y = 2 - \frac{5}{a+1}$
 그런데 $x > 0, y > 0$ 이므로
 $\frac{5}{a+1} > 0, 2 - \frac{5}{a+1} > 0$ 에서,
 $a > \frac{3}{2}$

7. 가로 길이가 세로 길이보다 5cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34cm 일 때, 이 직사각형의 가로 길이와 세로 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \dots\dots\text{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x+y)$ 이므로

$$2(x+y) = 34 \text{ 즉, } x+y = 17 \dots\dots\text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 ㉠에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

8. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
 (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어난 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

- ① (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 1680$
 ② (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 3360$
 ③ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$
 ④ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 3360$
 ⑤ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

해설

시속 30 km \Rightarrow 분속 500 m
 (가) $\frac{x}{60} + 3 + \frac{y}{500} = 10$, $\frac{x}{60} + \frac{y}{500} = 7$
 $\therefore 25x + 3y = 10500$
 (나) $\frac{x+y}{60} = 28$
 $\therefore x + y = 1680$

9. 200m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

- ① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
 $3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
 $x + y = 200$
$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분
 $\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분} = \frac{0.4\text{km}}{3} \times 60/\text{시간} = 8 \text{ km/h}$

10. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 를 구하여 x^2-y^2 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12 또는 -12

해설

$$\begin{cases} x-y=2 & \dots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=20 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = x - 2$ 를

②식에 대입하면

$$x^2 + (x-2)^2 = 20, 2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x-4)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12 \quad \text{또는} \quad x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$$

11. 연립방정식 $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x = 18, y = -1$ 또는 $x = 2, y = 3$

② $x = -2, y = -3$ 또는 $x = 2, y = 3$

③ $x = \frac{18}{5}, y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 2, y = 3$

④ $x = \frac{18}{5}, y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2, y = -3$

⑤ $x = -\frac{18}{5}, y = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = -2, y = -3$

해설

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \cdots \text{㉠} \\ x^2 + y^2 = 13 \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

$y = -2x + 7$ 를 ㉡식에 대입

$$x^2 + (2x - 7)^2 = 13$$

$$5x^2 - 28x + 36 = (5x - 18)(x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{18}{5}, y = -\frac{1}{5} \\ x = 2, y = 3 \end{cases}$$

12. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

② $x = 2, y = 1$

③ $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

④ $x = -2, y = -1$

⑤ $x = 2, y = -1$

해설

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm\sqrt{3}, x = \mp\sqrt{3}$$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm 1, x = \pm 2$$

$$\therefore \text{해는 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ (복호동순)}$$

13. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

- ① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x+y)(x-2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x &= 2y \\ \text{i) } x = -y \quad 2x^2 + y^2 &= 2y^2 + y^2 = 9 \\ y = \pm\sqrt{3}, \quad x &= \mp\sqrt{3} \\ \text{ii) } x = 2y \quad 2x^2 + y^2 &= 8y^2 + y^2 = 9 \\ y = \pm 1, \quad x &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{해} : \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

(복부호동순)

14. $x = \alpha, y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \text{①} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \text{②} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①×3 - ②×2하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 ① 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{ 불능}$$

$x = y$ 를 ①식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1, x = \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \text{①} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \text{②} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② $\times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y, x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$ 일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

16. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore u = \pm 7, v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 \quad \cdots \textcircled{\ominus} \\ xy = 12 \quad \cdots \textcircled{\omin�} \end{cases}$$

또는
$$\begin{cases} x + y = -7 \quad \cdots \textcircled{\omin�} \\ xy = 12 \quad \cdots \textcircled{\omin�} \end{cases}$$

(i) $\textcircled{\omin�}, \textcircled{\omin�}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = 3, y = 4$ 또는 $x = 4, y = 3$

(ii) $\textcircled{\omin�}, \textcircled{\omin�}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = -3, y = -4$ 또는 $x = -4, y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

17. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

18. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변형 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
 $xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$
(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,
 $xy = 1, x = y$
 $\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$
(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면
 $xy = -1, x = -y$
 $\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

19. 연립방정식
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x^2+y^2-z^2=25 \\ x^3+y^3-z^3=109 \end{cases}$$
 의 근을

$x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ 의 값은 ?

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$$x+y-z=1 \dots ①$$

$$x^2+y^2-z^2=25 \dots ②$$

$$x^3+y^3-z^3=109 \dots ③$$

$$① \text{ 에서 } z=x+y-1 \dots ④$$

④ 를 ②, ③ 에 대입하여 각각 정리하면

$$x+y-xy=13,$$

$$xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=-36$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 위식은 각각

$$u-v=13 \dots ⑤$$

$$uv-u^2+u+36=0 \dots ⑥$$

⑤, ⑥ 을 연립하면 $u=3, v=-10$

$$\therefore x+y=3, xy=-10, z=2$$

$$\therefore (x, y, z) = (5, -2, 2), (-2, 5, 2)$$

$$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=9$$