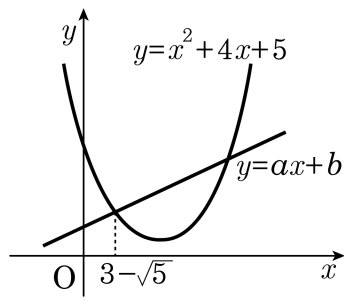


1. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
 y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
 $x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots \text{㉠}$
 이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
 $3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
 $\therefore (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
 $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
 $\therefore a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 3$

2. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$
 $\therefore y_1 y_2 = (-x_1 + 3)(-x_2 + 3)$
 $= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9$
 $= -2 + 12 + 9 = 19$

3. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \text{㉠}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

$$\text{㉠에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

4. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 5x + b$ 가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
 α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$ 의 두 실근이다.
 $2x^2 + (a-5)x + 12-b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2} \dots\dots \text{㉠}$
또, 선분 PQ의 중점의 x 좌표가 3이므로
 $\frac{\alpha + \beta}{2} = 3$ 에서 $\alpha + \beta = 6 \dots\dots \text{㉡}$
㉠, ㉡에서 $-\frac{a-5}{2} = 6$
 $\therefore a = -7$
또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b \therefore b = 2$
 $\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

5. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4 ② 2 ③ -4 ④ -2 ⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

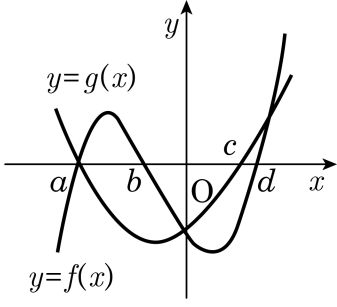
$$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라면}$$

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

6. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?

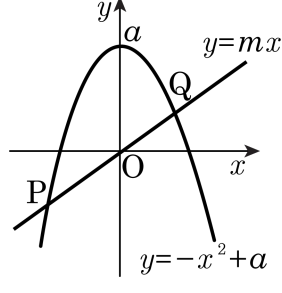


- ① a ② a, b ③ a, c
 ④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because \text{실수 } a, b \text{ 에 대하여 } a^2 + b^2 = 0 \text{ 이면 } a = 0 \text{ 이고 } b = 0 \text{ 이다.})$

7. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

8. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a , b 의 곱 ab 의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3 + a)x + 1 - b = 0$

의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

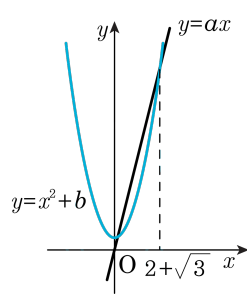
$$1 + 5 = \frac{3 + a}{2}, \quad 1 \times 5 = \frac{1 - b}{2}$$

$$\therefore a = 9, \quad b = -9$$

$$\therefore ab = -81$$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, a, b 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
 $a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
 $b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
 $\therefore a + b = 5$

10. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 x , $x+4$ 라 하면

$$y = x^2 + (x+4)^2$$

$$= 2x^2 + 8x + 16$$

$$= 2(x+2)^2 + 8$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$$\therefore x = -2, x+4 = 2$$

따라서 구하는 두 수는 -2, 2

11. $x^2 + 2y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $4x + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

$$x^2 + 2y^2 = 4 \text{에서 } 2y^2 = 4 - x^2$$

이때, y 는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x - 2)^2 + 8$$

$$(-2 \leq x \leq 2)$$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값 $m = -8$ 이고,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = 8$ 이므로 $M + m = 0$

12. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6