

1. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $xf(x)-3$ 을 $x+1$ 로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$$\therefore xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$$

$$\therefore xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)+R\} - R - 3$$

2. $a = 2004, b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

3. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하자.

$$4(a + b + c) = 36, 2(ab + bc + ca) = 56$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 56 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{대각선의 길이}) &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

4. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 성립할 때, $a(b+c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

양변에 $x=2, -2, 1$ 을 각각 대입하면

$$0 = 1 + a + b + c, 0 = -27 + 9a - 3b + c, -9 = c$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=5, b=3, c=-9$

$$\therefore a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$$(x-2)(x+2)^2$$

$$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$= (x-1)[(x-1)((x-1) + a) + b] + c$$

1		1	2	-4	-8	
			1	3	-1	
1		1	3	-1	-9	← c
			1	4		
1		1	4	3		← b
			1			
		1	5			← a

$$\therefore a(b+c) = 5(3-9) = -30$$

5. $x^3 - 4x^2 + ax + b$ 를 $(x + 1)^2$ 으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$\begin{array}{r} x-6 \\ x^2+2x+1 \overline{) x^3-4x^2+ax+b} \\ \underline{-(x^3+2x^2+x)} \\ -6x^2+(a-1)x+b \\ \underline{-(6x^2-12x-6)} \\ (a+11)x+b+6 \end{array}$$

나머지가 7이므로 $a + 11 = 0, b + 6 = 7$

$\therefore a = -11, b = 1$

$\therefore a + b = -10$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + ax + b &= (x + 1)^2(x + k) + 7 \\ &= x^3 + (k + 2)x^2 + (2k + 1)x + k + 7 \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$\begin{aligned} k + 2 &= -4, 2k + 1 = a, k + 7 = b \\ k &= -6 \text{ 이므로 } a = -11, b = 1 \\ \therefore a + b &= -10 \end{aligned}$$

6. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x = 0$ 대입, $a_0 = 1$

$x = 1$ 대입, $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$

$2a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 1 + 1024 = 1025$

7. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 를 $x+2$ 로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$ 에서

$f(-2) = g(-2)$ 이므로

$$4 - 6 + a = -8 - 2a$$

$$\therefore a = -2$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$ 라고 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \\f(1) &= a + b = 3, \quad f(2) = 2a + b = 1 \\a &= -2, \quad b = 5 \\\therefore a + b &= 3\end{aligned}$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2 이다. $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 1$$

$$Q(2) = -2$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-3)Q(2) + 1 \\ &= -1 \times (-2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

10. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i = 1$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & i \end{array}$$

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+c+1 \end{array}$$

이때 $a+b+c+1 = 1$ 이므로
 $a+b+c = 0$
 따라서 ③이다.

11. 다항식 $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)(2x-1)(2x+1)$

② $(x+1)(2x+1)(2x-1)$

③ $(x+1)(2x+1)(3x-1)$

④ $(x+1)(2x-1)(3x+1)$

⑤ $(x-1)(2x+1)(2x-1)$

해설

$f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ 이라 하면

$f(-1) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.

$\therefore 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (x+1)(6x^2 - x - 1)$

$= (x+1)(2x-1)(3x+1)$

12. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1007}{1006}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)} \\ &= 2013 \text{ 이므로} \\ \therefore \frac{a+1}{a-1} &= \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006} \end{aligned}$$

13. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \text{ 을 변형하면} \\(\text{준식}) &= (1 - z)(1 - x)(1 - y) \\&= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \\&= 1 - 1 + 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

14. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 $x^3+3x^2-10x-24$ 라고 한다. 이 때, 두 다항식을 바르게 구한 것은?

- ① x^2-x-6, x^2+6x+8 ② x^2-3x-1, x^2+x+8
③ x^2-4x+3, x^2-x+2 ④ x^2-x-2, x^2-3x+8
⑤ x^2-3x-6, x^2+3x+7

해설

두 다항식을 $A=aG, B=bG$ (a, b 는 서로소)라고 하면
두 식의 최대공약수가 $x+2$ 이므로
 $A=a(x+2), B=b(x+2)$
따라서, $L=ab(x+2)$
 $=x^3+3x^2-10x-24$ 이다.
이 때, 최소공배수 L 은 최대공약수 $x+2$ 를 인수로 가지므로
조립제법을 이용하면
 $L=(x+2)(x-3)(x+4)$
 a, b 는 일차식이므로
 $a=x-3, b=x+4$ 또는 $a=x+4, b=x-3$
따라서, 두 다항식은
 $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$ 과 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$ 이다.

15. 최대공약수가 $x - 1$, 최소공배수가 $x^3 - 7x + 6$ 인 두 이차다항식의 합은?

- ① $2x^2 + x + 3$ ② $2x^2 + 3x - 1$ ③ $x^2 - x - 2$
④ $2x^2 - x - 1$ ⑤ $x^2 - 3x - 2$

해설

최대공약수가 $x - 1$ 이므로
두 다항식을 $A(x - 1)$, $B(x - 1)$
(A , B 는 서로소인 일차식)으로 놓으면
 $x^3 - 7x + 6 = AB(x - 1)$
 $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = AB(x - 1)$
 $\therefore AB = (x - 2)(x + 3)$
 A , B 는 일차식이어야 하므로
$$\begin{cases} A = x - 2 \\ B = x + 3 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} A = x + 3 \\ B = x - 2 \end{cases}$$

따라서 두 다항식은 $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x + 3)$ 이다.
 $\therefore$ (두 다항식의 합)
 $= (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x + 3) = 2x^2 - x - 1$

16. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16

② 8

③ 4

④ 2

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \text{을} \\ & xy+yz+zx=1 \text{을 이용하여 변형하면} \\ & (xy+yz)(yz+zx)(zx+xy) \\ &= (1-zx)(1-xy)(1-yz) \\ &= 1 - (xy+yz+zx) + (x^2yz+xy^2z+xyz^2) - (xyz)^2 \\ &= 1 - (xy+yz+zx) + xyz(x+y+z) - (xyz)^2 \\ &= 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc \end{aligned}$$

17. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$ 가 이차식의 완전제곱이 되도록 a 의 값을 정하면?

① 4

② 8

③ 12

④ 15

⑤ 16

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) + a$$

여기서, $x^2 - 8x + 7 = X$ 로 놓으면

$$(\text{준식}) = X(X + 8) + a$$

$$= X^2 + 8X + a = (X + 4)^2 + a - 16$$

따라서 $a = 16$

18. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$
$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

- ① 0
- ② -1
- ③ 1
- ④ -10
- ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면,

(우변) $= \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

19. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 - 3 = -2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$$

$$(-1) \times (-2) = x^5 + \frac{1}{x^5} + 1$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

해설

$x + \frac{1}{x} = 1$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2 - x + 1 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1, \frac{1}{x^3} = -1$$

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= -x^2 - \frac{1}{x^2} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= -(-1) = 1 \end{aligned}$$

20. 다항식 $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x + \frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면 ?

- ① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \\ \therefore x \cdot f(x) &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx \\ &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\{axQ(x) + R\} - \frac{b}{a}R \end{aligned}$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x) + R$
나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \text{에서} \\ \text{나머지 정리에 의해 } f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R \\ x \cdot f(x) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)Q'(x) + R' \text{이라 하면} \\ \text{나머지 정리에 의해 } -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R' \\ f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R \text{를 대입하면 } R' = -\frac{b}{a}R \end{aligned}$$

21. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

22. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned} & x = 21 \text{ 이라 하면} \\ & \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ &= \sqrt{\color{red}{x(x+3)}(x+1)(x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1} \\ &= \sqrt{\color{red}{[(x^2 + 3x) + 1]^2}} \\ &= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2 + 3x) + 1 > 0) \\ &= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ & \text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

23. $a(a+1)=1$ 일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6-1}{a^4-a^2} &= \frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)} \\ &= \frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입} \\ &= \frac{2(1-a) \times 2}{1-a} = 4\end{aligned}$$

24. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

1	2	$-(a+2)$	$-a$	$2a$
		2	$-a$	$-2a$
	2	$-a$	$-2a$	0

$g(x) = (x-1)(2x^2 - ax - 2a)$

$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$ 이므로

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0$ 에서 $a = 2$

$\therefore g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0-8 \neq 0$

i) , ii) 에서

$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$ 이고 $a = 2$

25. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots \textcircled{A}$$

$$P + Q = x\{2x^2 + (a + b)x + 2\} \cdots \textcircled{B}$$

P , Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P , Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서 G 는

$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$$\therefore a - b = -2, a + b = -2$$

$$\therefore a = -2, b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -4$$