1. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \le x \le 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 −4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$ 에서 최댓값 5 , $x = 1$ 에서 최솟값 −4

2. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3　② 7　③ -2　④ 0　⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로
$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.
(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$
(최솟값)$=-3$

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x + 5(2 \le x \le 5)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 1　　② 4　　③ 9　　④ 16　　⑤ 25

해설

$y = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 5$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이고

아래로 볼록한 포물선이다.
꼭짓점이 주어진 구간 안에 포함되지 않으므로 최댓값, 최솟값은 주어진 구간의 양끝값이 된다.

$x = 2$ 일 때 $y = 2\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 1$

$x = 5$ 일 때 $y = 2\left(5 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 25$

따라서 최댓값 $a = 25$ 이고, 최솟값 $b = 1$ 이므로 $ab = 25$

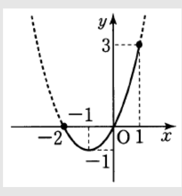
4. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



5. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

6. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x\ (1 \leq x \leq 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

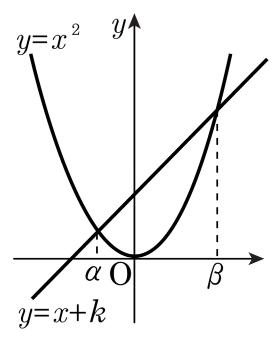
꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 4

$x = 5$ 에서 최솟값 −5

7. 이차함수 $y = x^2$과 일차함수 $y = x + k$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\alpha + \beta = 1$	㉡ $k > 0$	㉢ $\alpha\beta = -k$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$과 $y = x + k$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 1 \cdots$ (참)

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$의 판별식을 D라 하면 $\mathrm{D} = 1 + 4\mathrm{k} > 0$
에서 $k > -\frac{1}{4} \cdots$ (거짓)

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta = -k \cdots$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

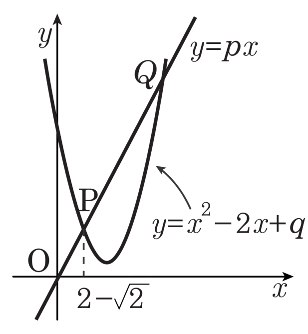
8. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,
즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -k$
두 그래프의 교점의 좌표를
$(\alpha,\ 2\alpha + k),\ (\beta,\ 2\beta + k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$ 에서
$\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k),\ 8 = 4 + 4k$
$\therefore\ k = 1$

9. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수$y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?

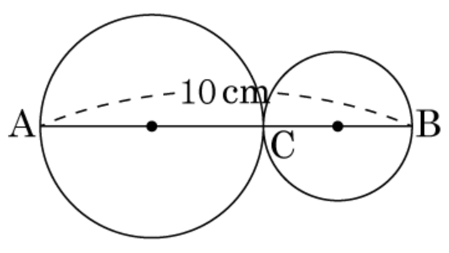


① 1 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

10. 다음 그림과 같이 지름의 길이의 합이 10cm 인 두 원이 있다. 두 원의 넓이의 합의 최솟값을 구하여라. (단, 소수 첫째 자리까지 구하여라.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $12.5\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

두 원의 반지름의 길이를 각각 $x$cm , $(5-x)$cm 라 하고
두 원의 넓이의 합을 $y\mathrm{cm}^2$ 라 하면,

$y=\pi x^2+\pi(5-x)^2=\pi(2x^2-10x+25)=2\pi(x^2-5x+\frac{25}{4})+(-\frac{25}{2}+25)\pi=2\pi(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{2}\pi$ 이다.

따라서 두 원의 넓이의 합은 $\frac{5}{2}$cm 일 때 최솟값 $12.5\pi\,\mathrm{cm}^2$ 를 갖는다.

11. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m　② 8m　③ $\frac{17}{2}$m　④ 3m　⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30-2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30-2x) \\ &= x(15-x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}\,\mathrm{m}^2$ 을 가진다.

12. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18 ② 20 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24-2x$ 이다.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} \times x \times (24-2x) \\
&= x(12-x) \\
&= -x^2 + 12x \\
&= -(x^2 - 12x + 36 - 36) \\
&= -(x-6)^2 + 36
\end{aligned}
$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

13. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

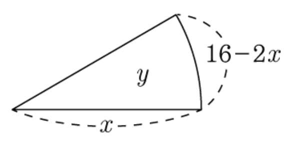
해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24-2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\text{cm}^2$ 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12$ cm 이다.

14. 둘레의 길이가 16 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 호의 길이는 $16-2x$, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

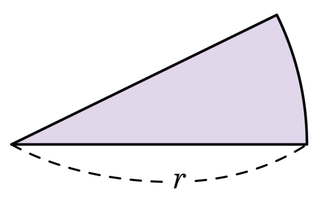
▷ 정답 : 16

해설

$$y = \frac{1}{2} \times x \times (16-2x)$$
$$= x(8-x)$$
$$= -x^2 + 8x$$
$$= -(x^2 - 8x + 16 - 16)$$
$$= -(x-4)^2 + 16$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(4,\ 16)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 16 을 가진다.

15. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20 - 2r)$cm
부채꼴의 넓이를 y라 하면
$y = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = (10 - r)r = -(r - 5)^2 + 25$
따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 5 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^2를 가진다.

16. $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$

x, y가 실수이므로

$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$

$\therefore -2 \leq y \leq 2$

$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면

$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$

$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$

이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때

최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 -4이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

17. 합이 18 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 17　② 65　③ 77　④ 81　⑤ 162

해설

두 수를 각각 x, $18-x$ 라고 하면

$y=x(18-x)$

$=-x^2+18x$

$=-(x^2-18x+81-81)$

$=-(x-9)^2+81$

$x=9$ 일 때, 최댓값 81 을 갖는다.

18. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

19. 사차방정식$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$의 근 중에서 제일 큰 근을 α, 제일 작은 근을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① $\sqrt{5}$　② $\frac{\sqrt{5}}{2}$　③ $1-\sqrt{5}$
④ $2-\sqrt{5}$　⑤ $3-\sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1^2}{x}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$라 하면

$t^2-5t+6=0 \rightarrow t=2,\ 3$

i) $t=2$일 때

$x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=1$

ii) $t=3$일 때

$x^2-3x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

20. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$

$x + \frac{1}{x} = a$로 치환하면

$a^2 - a - 6 = 0$, $(a-3)(a+2) = 0$

$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

21. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$을 대입하면

$1 = 0$이 되어 모순이므로 $x \neq 0$이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2으로 나누면

$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$

$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$로 놓으면

$X^2 + 5X - 14 = 0$, $(X + 7)(X - 2) = 0$

$\therefore X = -7$ 또는 $X = 2$

(i) $X = -7$일 때,

$x + \frac{1}{x} = -7$에서

$x^2 + 7x + 1 = 0$

$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X = 2$일 때,

$x + \frac{1}{x} = 2$에서

$x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$

$\therefore x = 1$

(i), (ii)로부터

$x = 1$(중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$이다.