1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$의 한 근이 -1이므로 $x = -1$을 대입하면
$(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
$\therefore\ k = 3$

4. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ -\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2},\ -\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

5. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2 ② $-1+\sqrt{2}$, -3 ③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설
한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

7. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

8. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10　② -2　③ -1　④ 2　⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0,$
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0,$
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii) 에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

9. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

10. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

11. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

12. 방정식 $x^6-1=0$의 해가 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

13. 삼차방정식 $x^3+x-2=0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ ② $-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$

④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

14. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

15. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2\ ,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

16. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

1	1	0	−13	12
		1	1	−12
	1	1	−12	0

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로
$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$
$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -4$또는 $x = 1$또는 $x = 3$
$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

17. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

18. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

-1	1	1	-1	-7	-6
		-1	0	1	6
2	1	0	-1	-6	0
		2	4	6	
	1	2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 허근이므로

$(D<0\ )\alpha+\beta=-2$

19. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\alpha-\beta-\gamma$ 의 값은?(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

해설

$x^3-8x^2+17x-10=0$ 인수분해하여 해를 구하면
$(x-1)(x-2)(x-5)=0$
$\therefore\ \alpha=1, \beta=2, \gamma=5$
$\therefore\ \alpha-\beta-\gamma=1-2-5=-6$

20. $x^3-2x^2-5x+6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=-2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 으로 놓으면

$f(1)=1-2-5+6=0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-5x+6 &= (x-1)(x^2-x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

21. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore \quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

22. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ……㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$ ……㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

23. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

> 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c$는 실수$)$ 에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 두고 $x=1+2i$를 대입하면 $f(1+2i)=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11-3a+b+c)+(-2+4a+2b)i=0$
> a,b,c 가 실수이므로 이제 $x=1-2i$ 를 대입하면 $f(1-2i)=(1-2i)^3+a(1-2i)^2+b(1-2i)+c=(-11-3a+b+c)-(-2+4a+2b)i=0$
> 따라서 (　　(가)　　)

(가) 에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

① 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c$ 는 실수$)$ 의 한 근이 $1+2i$ 이면, $1-2i$ 도 근임을 알 수 있다.
② 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c$ 는 실수$)$ 의 한 근이 $1-2i$ 이면, $1+2i$ 도 근임을 알 수 있다.
③ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c$ 는 실수$)$ 의 한 근이 $1+2i$ 라고 해서, 반드시$1-2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
④ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c$ 는 실수$)$ 의 한 근이 $1-2i$ 라고 해서, 반드시$1+2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
⑤ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,\ b,\ c$ 는 실수$)$ 은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x=1+2i$ 를 대입한 결과와 $x=1-2i$를 대입한 결과가 같다.

24. 실계수 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+2=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \gamma$ 라 하면

$(1+i)(1-i)\gamma=-2,\ \ 2\gamma=-2$

$\therefore\ \gamma=-1$

$(1+i)+(1-i)+\gamma=-a=1$

$\therefore\ a=-1$

$(1+i)(1-i)+(1-i)\gamma+\gamma(1+i)=0,\ \ b=0$

$\therefore\ a+b=-1$

25. 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+4=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{2}$　② $-\dfrac{3}{4}$　③ -1　④ $-\dfrac{3}{2}$　⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$, $\alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$=\dfrac{-2-\alpha}{\alpha}+\dfrac{-2-\beta}{\beta}+\dfrac{-2-\gamma}{\gamma}$

$=-2\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)-3$

$=-2\left(\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)-3=-\dfrac{3}{2}$