

1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, $C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$ 를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$

② $-3x^2 + 24x + 21$

③ $3x^2 - 12x + 21$

④ $-3x^2 - 24x + 21$

⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$\begin{aligned} & 3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B \\ &= -2A + 5B - 4C \\ &= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3) \\ &= -3x^2 - 24x + 21 \end{aligned}$$

2. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$ 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누면 나머지가 1 일 때, 다항식 $f(x)$ 를 $2x + 1$ 로 나눈 몫 $Q(x)$ 와 나머지 R 을 구하면?

- ① $Q(x) = 2x^2 - x, R = 1$ ② $Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x, R = 1$ ④ $Q(x) = 4x^2 - 2x, R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x, R = \frac{1}{2}$

해설

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } f(x) &= 4x^3 + 4x^2 + x + 1 \\ &= x(4x^2 + 4x + 1) + 1 \\ &= x(2x + 1)^2 + 1\end{aligned}$$

$$2x + 1 \text{로 나누면 } Q(x) = 2x^2 + x, R = 1$$

3. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, \quad b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

- ㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$
㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

4. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0

② 2

③ -2

④ 4

⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은

(3차항) $\times$ (상수항), (2차항) $\times$ (1차항)

2쌍씩이다.

$$4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$$

5. x 에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1} - \frac{x^2-x-3}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$ 에서 $A-B$ 의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.

양변에 $x=2$, $x=-2$ 를 대입해서 정리하면

$x=2$ 일 때

$$\frac{4-6-1}{1} - \frac{4-2-3}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2A+B}{2 \times 1 \times 3}$$

$$-3 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2A+B}{6}$$

$$\therefore 2A+B = -10 \cdots \textcircled{1}$$

$x=-2$ 일 때

$$\frac{4+6-1}{-3} - \frac{4+2-3}{-1} + \frac{2}{-2} = \frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3 + 3 - 1 = \frac{-2A+B}{-6}$$

$$\therefore -2A+B = 6 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $A=-4$, $B=-2$

$$\therefore A-B = (-4) - (-2) = -2$$

6. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0, m + n = -3$$

$$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2, m - n = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1, n = -2$

$$\therefore mn = 2$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$
 $(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$
 $x = 1, x = -1$ 을 대입한다.
 $4f(1) = 12 = a + b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2f(-1) = -2 = -a + b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면,
 $a = 7, b = 5$
 $\therefore$ 나머지 $R(x) = 7x + 5$
 $R(1) = 12$

8. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

9. x 에 관한 항등식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 를 만족시키는 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$
 $= (x-1)\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + d$
 $= (x-1)[(x-1)\{a(x-1) + b\} + c] + d$
따라서 $x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a = 1, b = 5, c = 4, d = 5$
 $\therefore abcd = 100$

10. $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$ 를 인수분해하면?

① $(ab - a + b - 1)(ab - a - b - 1)$

② $(ab - a + b + 1)(ab - a - b + 1)$

③ $(ab + a - b + 1)(ab - a + b - 1)$

④ $(ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)$

⑤ $(ab + a + b + 1)(ab + a - b - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 - 4ab \\&= (a^2b^2 - 2ab + 1) - (a^2 + 2ab + b^2) \\&= (ab - 1)^2 - (a + b)^2 \\&= (ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)\end{aligned}$$

11. 다항식 $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 합으로 옳은 것은?

- ① $3x + 3y - 2$ ② $3x - y - 4$ ③ $3x + y + 4$
④ $3x + y - 2$ ⑤ $3x - y + 2$

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + (3y + 5)x - (2y^2 - 5y - 3) \\ &= (2x + (2y + 1))(x - (y - 3)) \\ &\therefore (2x + 2y + 1) + (x - y + 3) = 3x + y + 4 \end{aligned}$$

12. $\frac{2007^3 - 1}{2007 \times 2008 + 1}$ 의 값은?

- ① 2004 ② 2005 ③ 2006 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

2007 = a 로 놓고

주어진 식을 a 에 대한 식으로 변형하면

$$\begin{aligned}\frac{a^3 - 1}{a(a + 1) + 1} &= \frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1} \\ &= \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)}{a^2 + a + 1} \\ &= a - 1 = 2007 - 1 = 2006\end{aligned}$$

13. $x^2 = 3 - \sqrt{2}$ 일 때, $\frac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1}$ 의 값은?

㉠ $8 - 6\sqrt{2}$

㉡ $8 - 4\sqrt{2}$

㉢ $5 - 6\sqrt{2}$

㉣ $5 - 4\sqrt{2}$

㉤ $3 - 6\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - x^4 - 3x + 3}{x - 1} &= \frac{x^4(x - 1) - 3(x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{(x^4 - 3)(x - 1)}{x - 1} \\ &= x^4 - 3 \\ &= (3 - \sqrt{2})^2 - 3 \\ &= 11 - 6\sqrt{2} - 3 = 8 - 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

14. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 에서
 $\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$
 $a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$
 $2a^2 = 2b^2 + 2c^2$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

15. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

16. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

- ① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면
 $2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

17. x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$,
 $Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5, Q(x) = (x+3)Q_1(x) + 3$ 이므로
 $P(x) = (x-2)((x+3)Q_1(x) + 3) + 5$
 $= (x-2)(x+3)Q_1(x) + 3x - 1$
 $\therefore P(-3) = -9 - 1 = -10$
따라서 $xP(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는
 $-3P(-3) = -3 \times (-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
 $P(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서 양변에 x 를 곱하면
 $xP(x) = x(x-2)Q(x) + 5x \cdots \textcircled{1}$
나머지정리에 의해 $xP(x)$ 를 $x+3$ 로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$ 이다.
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $-3P(-3) = -3 \cdot (-5)Q(-3) - 15$
 $Q(-3) = 3$ 을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

18. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p=-1, q=1, r=1 \\ & \therefore p^2+q^2+r^2=3 \end{aligned}$$

19. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$ 를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a + b - c - d)(a - b + c + d)$

② $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

③ $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$

④ $(a - b + c - d)(a - b + c + d)$

⑤ $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\ &= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + b + c - d)(a - b + c + d) \end{aligned}$$

20. 두 다항식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 과 $3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a$ 의 최대공약수가 이차식일 때, a 의 값은?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$3x^3 + (a-9)x^2 - ax - 6a \text{에}$$

$$x=3 \text{ 대입, } 81+9a-81-3a-6a=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -24+4a-36+2a-6a \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$x-1 \text{ 을 인수로 가져야 한다.}$$

$$x=1 \text{ 대입 } 3+a-9-a-6a=0, a=-1$$

21. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

- ① -3
- ② -1
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면
 $A + B = G(f(x) + g(x)), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a + b)x^2 - 4x \\ \qquad = x(2x^2 + (a + b)x - 4) \\ A - B = (a - b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.
그러므로 $G = 2x^2 + (a + b)x - 4$
 $\therefore A - B = -G = -2x^2 - (a + b)x + 4$
계수비교하면 $a - b = -2, a + b = 4$

22. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차다항식 A, B 에 대하여 A, B 의 최대공약수를 (A, B) , A, B 의 최소공배수를 $[A, B]$ 라 하자. 다항식 A, B 가

$$(A + B, A - B) = 2x - 3, [A + B, A - B] = 2x^2 + x - 6$$

을 만족할 때, $2[A, B] = 0$ 과 같은 해를 갖는 것은?

- ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ ② $x^3 + 4x^2 - 2x - 7$
 ③ $x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ ④ $3x^3 - x^2 + 2x - 1$
 ⑤ $-x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소) 라 하자.
 $(A + B, A - B) = ((a + b)G, (a - b)G) = 2x - 3$ 이므로
 G 는 $2x - 3$
 따라서 A, B 는 $2x - 3$ 으로 나누어떨어지고 a, b 는 일차식이다.
 또 $[A + B, A - B] = [(a + b)G, (a - b)G] = 2x^2 + x - 6$
 $= (x + 2)(2x - 3)$ 이므로 $(a + b)(a - b)G = (x + 2)(2x - 3)$
 $\therefore (a + b)(a - b) = x + 2$ 이고
 a, b 는 모두 일차식이므로
 $a + b = x + 2, a - b = 1$ 이라 하고 연립하여 풀면
 $a = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$
 $b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 $\therefore [A, B] = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)(2x - 3)$
 $= \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)(2x - 3)$
 $= \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{4}x^2 - 3x + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
 $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$
 $\therefore 2[A, B] = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$
 따라서 $2[A, B]$ 와 같은 것은 ① $2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ 이다.

23. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

- ① $R + R'B$
- ② $R' + RB$
- ③ RR'
- ④ R
- ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
 $A = BQ + R \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $Q = B'Q' + R' \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $A = B(B'Q' + R') + R$
 $= (BB')Q' + (R + R'B)$
 $R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.
그런데 $R \leq B - 1, R' \leq B' - 1$ 이므로
 $R + R'B \leq (B - 1) + (B' - 1)B$
 $= BB' - 1 < BB'$
따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

24. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$ 를 대입하면, $2^n(4+2a+b) = 0$
 $\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \dots \textcircled{1}$
①을 준식에 대입하면,
 $x^n(x^2+ax-2a-4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
 $x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
 $x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$
다시 $x=2$ 를 대입하면,
 $2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$
 $a = -3$ 을 ①에 대입하면,
 $b = (-2)(-3) - 4 = 2$
 $\therefore a = -3, b = 2$
 $\therefore a+b = -1$

25. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,
 $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로
 $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$
또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로
 $f(1) = 2a + 2 = 4$ 에서 $a = 1$
따라서 $ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$
∴ 구하는 나머지의 상수항은 2