1. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $\mathrm{A} \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

2. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$ ② $2x$ ③ $3x+2$
④ $4x$ ⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1,\ \ R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

3. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

4. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4} = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{1}{4}$

5. k의 값에 관계없이 $(2k^2-3k)x-(k+2)y-(k^2-4)z=28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x+y+z$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면
$(2x-z)k^2-(3x+y)k-(2y-4z+28)=0$
$\therefore\ 2x-z=0, 3x+y=0, 2y-4z+28=0$
$z=2x,\ y=-3x$ 을 $2y-4z+28=0$에 대입하면
$x=2,\ y=-6,\ z=4$
$\therefore\ 3x+y+z=4$

6. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+(a-1) \\
\hline
x^2+x+1 & x^3+ax^2+\quad 2x+b \\
- & x^3+\ x^2+\quad x \\
\hline
 & (a-1)x^2+\quad x+b \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
\hline
 & (2-a)x+b-a+1
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$
$a = 0,\ b = 0$

7. 다항식 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(0)$ 의 값은?

① $2f(1)-f(2)$　　② $2\{f(1)+f(2)\}$

③ $2(1)+f(2)$　　④ $4\{f(1)+f(2)\}$

⑤ $4\{f(1)-f(2)\}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

$R(x)=ax+b,\ R(0)=b$

$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b$

$2f(1)-f(2)=b$

8. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$에 대하여 $f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어 떨어지고 $f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어 떨어진다. 이 때, $a - 2b$의 값은 ?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$로 떨어지므로
$f(1) - 2 = 0 \ \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$
$\therefore\ a + b = 1 \cdots$①
$f(x) + 2$ 는 $x + 1$로 나누어 떨어지므로
$f(-1) + 2 = 0 \ \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$
$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$②
㉠, ㉡ 에서 $a = 2,\ b = -1 \quad \therefore a - 2b = 4$

9. 다항식 $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x-y-2)(x+y-1)$　② $(2x+y+2)(x-y+1)$

③ $(2x-y-2)(x-y-1)$　④ $(2x+y-2)(x+y-1)$

⑤ $(2x+y-2)(x-y-1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 2x^2-(y+4)x-(y^2-y-2)\\ &= 2x^2-(y+4)x-(y+1)(y-2)\\ &= \{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}\\ &= (2x+y-2)(x-y-1)\end{aligned}$$

10. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

11. $x+y-1=0$일 때, 다음 중 $2x^2+y^2-xy-8$의 인수인 것은?

① $x-1$　　② $x+1$　　③ $x+2$
④ $4x+5$　　⑤ $4x+7$

해설
$x+y-1=0$에서 $y=-x+1$
$\therefore\ 2x^2+y^2-xy-8$
$=2x^2+(-x+1)^2-x(-x+1)-8$
$=4x^2-3x-7$
$=(4x-7)(x+1)$

12. x에 대한 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 + bx$와 $B = x^2 + bx + a$의 최대공약수가 일차식이다. 그 최대공약수를 구하면? (단, a, b는 상수이고 $ab \neq 0$)

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+1$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

$A(x) = x(x^2 + ax + b)$, $B(x) = x^2 + bx + a$
인수를 $(x-p)$로 놓으면
$A(p) = 0$에서 $p^3 + ap^2 + bp = 0 \cdots$ ㉠
$B(p) = 0$에서 $p^2 + bp + a = 0 \cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡ $\times p$에서 $(a-b)p^2 + (b-a)p = 0$
$\therefore \ (a-b)p(p-1) = 0$
그런데 $a \neq 0$이므로 $p \neq 0$
$\therefore \ p = 1$
따라서 최대공약수는 $x-1$

13. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2이다. 두 다항식을 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

먼저 x^3+2x^2-x-2를 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

1	1	2	−1	−2
		1	3	2
−2	1	3	2	0
		−2	−2	
	1	1	0	
:				

$\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

최대공약수가 $(x-1)$이므로

$f(x)=(x-1)(x+2), g(x)=(x-1)(x+1)\cdots$㉠

또는 $f(x)=(x-1)(x+1), g(x)=(x-1)(x+2)\cdots$㉡

㉠, ㉡ 두 경우 모두 $f(3)+g(3)=18$

14. 다항식 $f(x)=x^4+ax^2+x+2$를 $g(x)=x^3+bx+2$로 나눈 나머지가 $R(x)$라 한다. $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수가 $x+2$일 때, ab의 값은?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$에서
$g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수 $x+2$는
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수와 같다.
($\because$ 유클리드 호제법)
$f(-2)=16+4a=0, a=-4$
$g(-2)=-8-2b+2=0, b=-3$
$\therefore\ ab=12$

15. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$이고, $a = \sqrt{3} + 1$일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$
④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(ⅰ) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$
$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$
$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$
(ⅱ) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$
$= \frac{1}{a^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

16. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

17. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ -2　④ 2　⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a + b + c$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$= ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = -2,\ a + b + c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

18. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①
양변에 $x=2$을 대입하면
$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②
①+②에 의해
$2^{10}+2=2\,(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$
$\therefore\,(a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

19. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$를 $x^2+3x-15$로 나누면 나머지가 -2이다.
이때, $f(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나눈 나머지는?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+3x-15)\,Q_1(x)+12\cdots㉠$
$f(x)-g(x)=(x^2+3x-15)\,Q_2(x)-2\cdots㉡$
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=(x^2+3x-15)\,(Q_1(x)+Q_2(x))+10$
$f(x)=\frac{1}{2}(x^2+3x-15)\,(Q_1(x)+Q_2(x))+5$
∴ 나머지는 5

20. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

① 4 ② 14 ③ 24 ④ 34 ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면
$f(2) = A + B + C + D$ 이므로
$f(2)$를 구하기 위해서는
$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,
$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
 & & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & & \\
\end{array}$$

$\therefore\ A = 3,\ B = 9,\ C = 8,\ D = 4$
$\therefore\ A + B + C + D = 24$

21. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$
$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$
$x^2+8x=A$로 놓으면
(준식) $=(A+7)(A+15)+a$
$=A^2+22A+105+a$
$=(A+11)^2-16+a$
따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

22. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ㉡$

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots ㉢$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots ㉣$

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

23. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10000

해설

$9999 = a$ 라 하면

$$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3 + 1}{(a-1)a + 1}$$
$$= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}$$
$$= a + 1 = 10000$$

24. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$일 때, $x^4+y^4+z^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx = -2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4 = 8$

25. 다항식 $f(x)$를 $(x+2)(x-1)$, x^2+2x+2로 나눈 나머지가 각각 16, $-11x+2$라고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(0)$의 값은?

① 6　　② 8　　③ −2　　④ 1　　⑤ −4

해설

$R(x)$는 삼차 이하의 다항식이므로
$R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)+16\cdots$㉠
$f(x)=(x^2+2x+2)Q_2(x)-11x+2$
$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+ax^3+bx^2+cx+d$
$=(x+2)(x-1)(x^2+2x+2)Q_3(x)+(ax+k)(x^2+2x+2)-11x+2$
$=(x^2+2x+2)\{(x+2)(x-1)Q_3(x)+ax+k\}$
$-11x+2\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$f(1)=16=5(a+k)-11+2$
$\therefore\ a+k=5\cdots$㉢
$f(-2)=16=2(-2a+k)+22+2$
$\therefore\ -2a+k=-4\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=3,\ k=2$
따라서
$R(x)=(3x+2)(x^2+2x+2)-11x+2$
$\therefore R(0)=6$