1. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$이고, $a=\sqrt{3}+1$일 때, $a^{x^2}\div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$에서 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$

$x^2-2\sqrt{2}x+2=3$

$\therefore\ x^2-2\sqrt{2}x=1$

(ii) $a^{x^2}\div a^{2\sqrt{2}x+3}=a^{x^2-2\sqrt{2}x-3}=a^{-2}$

$=\frac{1}{a^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

2. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

3. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

4. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore\ a+b+c+d=-2$

5. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$일 때, $a^{2000}+b^{2006}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a+b=1$에서 $b=1-a$이고 $a^2+b^2=-1$이므로

$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$

이 식의 양변에 $a+1$을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$

같은 방법으로 하면

$b^3+1=0$이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^{2000}+b^{2006}&=(a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2\\&=a^2+b^2=-1\end{aligned}$$

6. 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 2차의 다항식 $f(x)$의 개수는?

(가) $f(0) = -1$ (나) $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 없다.

해설

$f(0) = -1$이므로
$f(x) = ax^2 + bx - 1 \ (a \neq 0)$라 하면
$f(x^2) = ax^4 + bx^2 - 1$이다.
$f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
그 몫을 $x^2 + cx + 1$이라 하면,
$(ax^4 + bx^2 - 1) = (ax^2 + bx - 1)(x^2 + cx + 1)$
이 항등식이 되어야 한다.
계수비교에 의해 $ac + b = 0 \cdots$ ㉠
$a + bc - 1 = b \cdots$ ㉡
$b - c = 0 \cdots$ ㉢
㉢에서 $c = b$, 이를 ㉠에 대입하면 $b(a + 1) = 0$
$\therefore \ b = 0$ 또는 $a = -1$
(i) $b = 0$이면 ㉡에서 $a = 1$
(ii) $a = -1$이면 ㉡, ㉢에서 $b^2 - b - 2 = 0$
$\therefore \ b = 2$ 또는 -1
$\therefore \ (a, b) = (1, 0), (-1, 2), (-1, -1)$의 3 쌍

7. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$
따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립

$\therefore\ g(x)=0$

즉, $f(x)=x$

$\therefore\ 1$개

8. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$

② $(ax+by)^2$

③ $(bx+ay)^2$

④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$

⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자) $= bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$

$= bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$

$= (a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$

$= (bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$= (bx+ay)(ax+by)^2$

따라서, (준 식) $= (ax+by)^2$

9. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

10. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a+b$　② $b+c$

③ $a+c$　④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

$$(\text{준 식}) = \{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$$
$$= (a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$$
$$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$= (b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$$
$$= 3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$$
$$= 3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$= 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

11. 다음 중 $\left(\dfrac{997}{1000}\right)^3+\left(\dfrac{3}{1000}\right)^3-1$의 값과 같은 것은?

① $\dfrac{3^2\times 997^3}{10}$ ② $\dfrac{3^2\times 997^6}{10}$ ③ $-\dfrac{3^2\times 997^3}{10}$

④ $-\dfrac{3^2\times 997}{10^6}$ ⑤ $-\dfrac{3^2\times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\dfrac{997}{1000}$과 $\dfrac{3}{1000}$을 더해보면 $\dfrac{997+3}{1000}=1$이므로

$a=\dfrac{997}{1000},\ b=\dfrac{3}{100},\ c=-1$이라 하면

$a+b+c=0$이 된다.

따라서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3=\left(\dfrac{997}{1000}\right)^3+\left(\dfrac{3}{1000}\right)^3+(-1)^3$의 값은

$3abc=3\times\dfrac{997}{1000}\times\dfrac{3}{1000}\times(-1)$와 같으므로

구하는 값은

$3\times\dfrac{997}{1000}\times\dfrac{3}{1000}\times(-1)=-\dfrac{3^2\times 997}{10^6}$

12. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, △ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형,또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)