

1. 분수식 $\frac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x 값들의 총합은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$8+2x-x^2 \geq 0$ 에서 $x^2-2x-8 \leq 0$
 $(x+2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 4$
(i) 분모 $= (x-1)(x-2) \neq 0$ 에서 $x \neq 1, 2$
(ii) 분자 $= x+3=0$ 에서 $x=-3$
 $\therefore$ 정수 $x=-3, -2, -1, 0, 3, 4$ 이고
(합) $= -3-2-1+0+3+4=1$

2. $abc \neq 0$ 인 실수 a, b, c 에 대하여 $\frac{|a|}{a} + \frac{\sqrt{b^2}}{b} + \frac{\sqrt{c^2}}{|c|} + \frac{\sqrt{(abc)^2}}{abc}$ 의 값이 될 수 없는 것은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\sqrt{b^2} = |b|$, $\sqrt{c^2} = |c|$, $\sqrt{(abc)^2} = |abc|$ 이므로

(주어진 식) = $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + 1 + \frac{|abc|}{abc}$ 에서

a, b, c 의 양, 음에 따라 주어진 식의 값을 구해 보면

(i) $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 + 1 + 1 + 1 = 4$

(ii) $a > 0, b > 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 + 1 + 1 - 1 = 2$

(iii) $a > 0, b < 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 - 1 + 1 - 1 = 0$

(iv) $a > 0, b < 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $1 - 1 + 1 + 1 = 2$

(v) $a < 0, b > 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 + 1 + 1 - 1 = 0$

(vi) $a < 0, b > 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 + 1 + 1 + 1 = 2$

(vii) $a < 0, b < 0, c > 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$

(viii) $a < 0, b < 0, c < 0$ 일 때,

(주어진 식) = $-1 - 1 + 1 - 1 = -2$

따라서 주어진 식의 값은 -2, 0, 2, 4 중 어느 하나이다.

3. 양수 a 의 소수 부분을 b 라 할 때, $a^2 + b^2 = 8$ 을 만족하는 a 의 값을 구하면?

① $1 + \sqrt{3}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 - \sqrt{3}$

⑤ $3 + 2\sqrt{3}$

해설

(i) a 가 정수일 때,
 $b = 0$, $a^2 = 8$ $a = 2\sqrt{2}$ (모순)
(ii) $a > 0$, 정수가 아닐 때 $b \neq 0$
 a 의 정수부분을 k 라 하면
 $a = k + b$ ($0 < b < 1$)이라 하면
 $a^2 + b^2 = 8$ 에서 $b^2 = 8 - a^2$
 $0 < 8 - a^2 < 1$, $\sqrt{7} < a < \sqrt{8}$
 $\therefore k = 2$ $\therefore b = a - 2$
 $a^2 + (a - 2)^2 = 2a^2 - 4a + 4 = 8$
 $a^2 - 2a - 2 = 0$, $a = 1 \pm \sqrt{3}$
 $\therefore a = 1 + \sqrt{3}$ ($\because a > 0$)

4. 실수 a 가 $0 < a < 2$ 이고, 실수 x, y 가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases} \quad \text{을 만족시킬 때,}$$

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \cdots \textcircled{1} \\ ax - y = a^3 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times a$ 하면

$$(4 - a^2)x = 16 - a^4$$

$$\therefore x = 4 + a^2, \quad y = 4a$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= 4 \quad (\because 0 < a < 2) \end{aligned}$$

5. a, b 는 실수이고, $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$ 일 때, $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ 의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$

② $-\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 52$$

$$(ab)^3 = (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1 \quad \therefore ab = 1$$

$a + b = t$ 라 하면

$$t^3 - 3t - 52 = 0, \quad (t - 4)(t^2 + 4t + 13) = 0$$

a, b 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$$t = 4 \text{ 이므로 } a + b = 4$$

$$\begin{aligned} \text{준식} &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b} \end{aligned}$$

$a + b = 4$, $ab = 1$ 이므로 a, b 는 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이고

$a^3 > b^3$ 이므로 $a > b$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{3}, \quad b = 2 - \sqrt{3} \quad \therefore a - b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4 + 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

6. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} \text{에서} \\ \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} &= a, \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b \text{라 하면} \\ x &= a - b, ab = -1 \\ x^3 &= (a - b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \\ \therefore x^3 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 & \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

7. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$ 를 만족시키는 양의 정수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면
 $20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$
 $=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot 2+c^3\cdot 2\sqrt{2}$
 $(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$
 $\therefore 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a \cdots \textcircled{1}$
 $b^3+6bc^2-20=0$ 에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots \textcircled{2}$
 b, c 는 양의 정수이므로
 $b^2+6c^2=10, b=2, c=1$
 $\textcircled{1}$ 에서 $a=14 \quad \therefore a+b+c=17$

8. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = px+q(p > 0)$ 에 대하여 부등식 $f\left(x-\frac{3}{2}\right) \leq g(x) \leq f(x)$ 을 만족하는 x 의 범위가 $2 \leq x \leq 3$ 일 때, 실수 $q-p$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f\left(x-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2x}$$

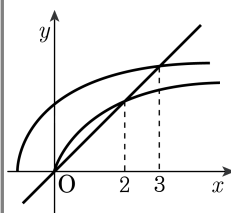
$$\sqrt{2x} \leq px+q \leq \sqrt{2x+3} \text{의 해가 } 2 \leq x \leq 3$$

이므로

그래프가 그림과 같아야 한다.

$$\therefore g(2) = 2, g(3) = 3 \quad \therefore g(x) = x$$

$$q-p = -1$$

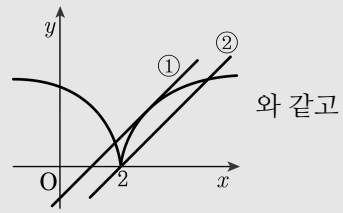


9. $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < -\frac{7}{4}$ ② $-2 < k \leq -\frac{7}{4}$ ③ $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$
 ④ $-2 \leq k \leq -\frac{7}{4}$ ⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{x-2}$ 의 개형은



$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$$x + k = \sqrt{x-2} \text{에서}$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$$

$$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{7}{4}$$

② $y = x + k$ 가 (2,0) 을 지날 때

$$0 = 2 + k$$

$$k = -2$$

$$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$$

10. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$, $y = mx - 1$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 m 의 값의 범위는 $\alpha \leq m < \beta$ 이다. $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하면?

- ① $3 + \sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{2}$

③ $4 - \sqrt{2}$
- ④ $4 + \sqrt{3}$

⑤ $4 + 3\sqrt{2}$

해설

$y = \sqrt{x-1} \dots \textcircled{㉠}$
 $y = mx - 1 \dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $mx - 1 = \sqrt{x-1}$ (양변 제곱)
 $m^2x^2 - 2mx + 1 = x - 1$
 $m^2x^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ (두 점에서 만나므로)
 $D = (2m+1)^2 - 8m^2 > 0$
 $4m^2 + 4m + 1 - 8m^2 > 0$
 $4m^2 - 4m - 1 < 0$
 $\therefore \frac{1-\sqrt{2}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \dots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉡}$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나거나 왼쪽에 있으므로
 $0 \leq m - 1 \therefore m \geq 1 \dots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 과 $\textcircled{㉣}$ 에서 $1 \leq m < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
 $\therefore \alpha = 1, \beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
 $\therefore \alpha + 2\beta = 2 + \sqrt{2}$

11. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x + a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a 값의 범위를 정하면?

- ① $-2 \leq a < 0$
- ② $-1 \leq a < 0$
- ③ $-2 \leq a < -1$
- ④ $-1 \leq a < 1$
- ⑤ $0 \leq a < 1$

해설

그림처럼 ①, ②
사이에서 두 개
다.

① 접할 때
 $\frac{1}{2}x + a = \sqrt{2x-4}$
 $x^2 + 4(a-2)x + 4a^2 + 16 = 0$
 $\frac{D}{4} = 2^2(a-2)^2 - 4a^2 - 16 = 0, \therefore a = 0$

② 점 (2,0) 을 지날 때,
 $0 = \frac{1}{2} \times 2 + a \quad \therefore a = -1$
 $-1 \leq a < 0$

12. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ② $0 \leq m < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$
 ④ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ ⑤ $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$

해설

$y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고

또 $y = mx$ 는 원점을 지나는 직선이다.

다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는

$mx = \sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.

즉 $m^2x^2 - x + 1 = 0$ 에서

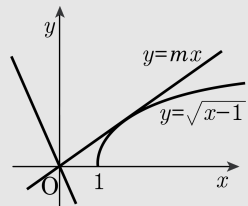
$D = 1 - 4m^2 = 0, \therefore m = \frac{1}{2} (\because m > 0)$

또한 $m = 0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 (1, 0) 에서 만난다.

따라서 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만나기 위한

m 의 값의 범위는

$\therefore 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$



13. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의

그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와

직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$ 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

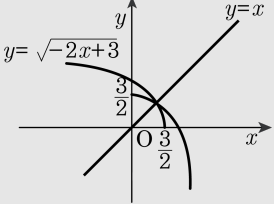
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1$, $y = 1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로

$a = 1$, $b = 1$

$\therefore a+b = 2$



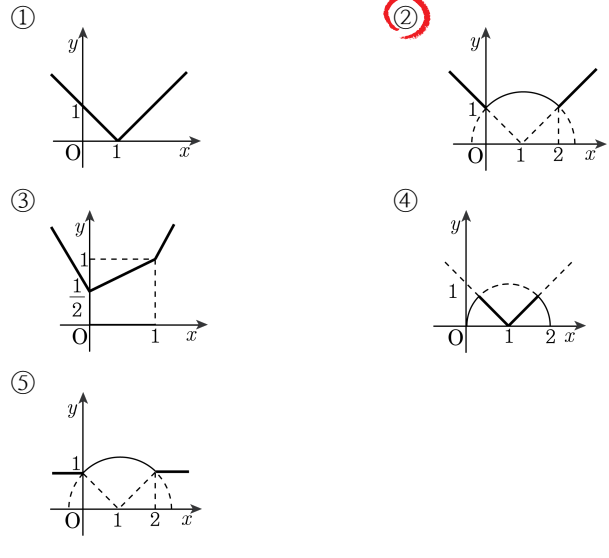
14. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 x 축 위의 점 $(a, 0)$ 으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a 의 값을 정하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,
그 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$
이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,
 $(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$
 $m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$
 $\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$
정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$
 m 의 두 근을 α, β 라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로
 $\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$
 $\therefore a = 2$

15. 함수 $y = \sqrt{1 + |2x - x^2|}$ 의 그래프는 ?



해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$
 즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,
 $0 \leq x \leq 2$
 이 때, $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$ 의 양변을 제곱하면,
 $y^2 = 1 + 2x - x^2$ ($y \geq 0$)
 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$)㉠
 (ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,
 $x < 0$ 또는 $x > 2$
 이 때,
 $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$
 $= \sqrt{(x - 1)^2}$
 $= |x - 1|$ ㉡
 (i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.

