1. 분수식 $\dfrac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x값들의 총합은?

① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

$8+2x-x^2 \geq 0$에서 $x^2-2x-8 \leq 0$

$(x+2)(x-4) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 4$

(i) 분모 $=(x-1)(x-2) \neq 0$에서 $x \neq 1,\ 2$

(ii) 분자 $=x+3=0$에서 $x=-3$

$\therefore$ 정수 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$이고

(합)$=-3-2-1+0+3+4=1$

2. $abc \neq 0$인 실수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{\sqrt{b^2}}{b}+\dfrac{\sqrt{c^2}}{|c|}+\dfrac{\sqrt{(abc)^2}}{abc}$의 값이 될 수 없는 것은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\sqrt{b^2}=|b|$, $\sqrt{c^2}=|c|$, $\sqrt{(abc)^2}=|abc|$이므로

(주어진 식)$=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+1+\dfrac{|abc|}{abc}$에서

a, b, c의 양, 음에 따라 주어진 식의 값을 구해 보면

(i) $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때,

(주어진 식)$=1+1+1+1=4$

(ii) $a>0$, $b>0$, $c<0$일 때,

(주어진 식)$=1+1+1-1=2$

(iii) $a>0$, $b<0$, $c>0$일 때,

(주어진 식)$=1-1+1-1=0$

(iv) $a>0$, $b<0$, $c<0$일 때,

(주어진 식)$=1-1+1+1=2$

(v) $a<0$, $b>0$, $c>0$일 때,

(주어진 식)$=-1+1+1-1=0$

(vi) $a<0$, $b>0$, $c<0$일 때,

(주어진 식)$=-1+1+1+1=2$

(vii) $a<0$, $b<0$, $c>0$ 일 때,

(주어진 식)$=-1-1+1+1=0$

(viii) $a<0$, $b<0$, $c<0$일 때,

(주어진 식)$=-1-1+1-1=-2$

따라서 주어진 식의 값은 -2, 0, 2, 4 중 어느 하나이다.

3. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $1-\sqrt{3}$ ⑤ $3+2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,

$b=0,\ a^2=8\ a=2\sqrt{2}$ (모순)

(ii) $a>0$, 정수가 아닐 때 $b\neq 0$

a의 정수부분을 k라 하면

$a=k+b\ (0<b<1)$이라 하면

$a^2+b^2=8$에서 $b^2=8-a^2$

$0<8-a^2<1,\ \sqrt{7}<a<\sqrt{8}$

$\therefore k=2 \qquad \therefore\ b=a-2$

$a^2+(a-2)^2=2a^2-4a+4=8$

$a^2-2a-2=0,\ a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1+\sqrt{3}(\because a>0)$

4. 실수 a가 $0 < a < 2$이고, 실수 x, y가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases}$$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \cdots ㉠ \\ ax - y = a^3 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $-$ ㉡ $\times a$ 하면

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore x = 4 + a^2, \quad y = 4a$

$$\therefore \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2}$$
$$= 4 \ (\because 0 < a < 2)$$

5. a, b는 실수이고, $a^3=26+15\sqrt{3}$, $b^3=26-15\sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 의 값을 구하면?

① $-2\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}$　　⑤ $-3\sqrt{3}$

해설

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=52$

$(ab)^3=(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})=1 \qquad \therefore\ ab=1$

$a+b=t$ 라 하면

$t^3-3t-52=0, \quad (t-4)(t^2+4t+13)=0$

a, b 가 실수이므로 t 도 실수이다.

$t=4$이므로 $a+b=4$

$$준식=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$

$$=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a+b=4$, $ab=1$ 이므로 a,b 는 $x^2-4x+1=0$ 의 근이고

$a^3>b^3$ 이므로 $a>b$

$\therefore\ a=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3} \qquad \therefore\ a-b=2\sqrt{3}$

$$\therefore (준식)=\frac{4+2}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

6. $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 일 때, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$x = \sqrt[3]{\sqrt{3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ 에서

$\sqrt[3]{\sqrt{3}+2} = a,\ \sqrt[3]{\sqrt{3}-2} = b$ 라 하면

$x = a - b,\ ab = -1$

$$\begin{aligned} x^3 &= (a-b)^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \\ &= \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 2) + 3x = 4 + 3x \end{aligned}$$

$\therefore\ x^3 - 3x - 4 = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ & x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 10x - 4 \\ &= (x^3 - 3x - 4)(x + 2) + 4 \\ &= 0 + 4 = 4 \end{aligned}$$

7. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$를 만족시키는 양의 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면

$20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$

$=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot\ 2+c^3\cdot\ 2\sqrt{2}$

$(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$

$\therefore\ 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a\quad\cdots$ ㉠

$b^3+6bc^2-20=0$에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots$ ㉡

b, c는 양의 정수이므로

$b^2+6c^2=10$, $b=2$, $c=1$

㉠에서 $a=14\quad\therefore\ a+b+c=17$

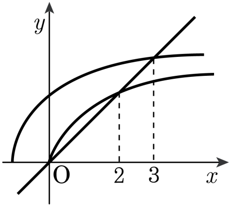
8. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = px + q(p > 0)$ 에 대하여 부등식 $f\left(x - \frac{3}{2}\right) \leq g(x) \leq f(x)$ 을 만족하는 x의 범위가 $2 \leq x \leq 3$일 때, 실수 $q - p$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f\left(x - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2x}$$

$\sqrt{2x} \leq px+q \leq \sqrt{2x+3}$ 의 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이므로
그래프가 그림과 같아야 한다.



$\therefore\ g(2) = 2, g(3) = 3 \quad \therefore g(x) = x$

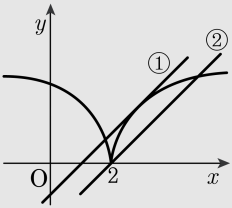
$q - p = -1$

9. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$ ② $-2 < k \leq -\frac{7}{4}$ ③ $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \leq k \leq -\frac{7}{4}$ ⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$ 의 개형은



와 같고

$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$x + k = \sqrt{x-2}$에서

$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$

$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x + k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2 + k$

$k = -2$

$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$

10. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$, $y = mx-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 m의 값의 범위는 $\alpha \le m < \beta$이다. $\alpha + 2\beta$의 값을 구하면?

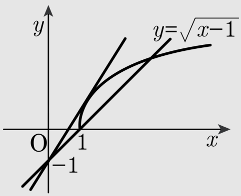
① $3 + \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $4 - \sqrt{2}$

④ $4 + \sqrt{3}$ ⑤ $4 + 3\sqrt{2}$

해설

$y = \sqrt{x-1}$ $\cdots$ ㉠

$y = mx - 1$ $\cdots$ ㉡



㉠, ㉡ 에서 $mx-1 = \sqrt{x-1}$ (양변 제곱)

$m^2x^2 - 2mx + 1 = x - 1$

$m^2x^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ (두 점에서 만나므로)

$D = (2m+1)^2 - 8m^2 > 0$

$4m^2 + 4m + 1 - 8m^2 > 0$

$4m^2 - 4m - 1 < 0$

$\therefore \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \cdots$ ㉢

㉡ 이 점 $(1,\ 0)$을 지나거나 윗쪽에 있으므로

$0 \le m - 1 \ \therefore\ m \ge 1 \cdots$ ㉣

㉢과 ㉣에서 $1 \le m < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \alpha + 2\beta = 2 + \sqrt{2}$

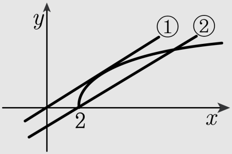
11. 곡선 $y = \sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x + a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 a값의 범위를 정하면?

① $-2 \le a < 0$ ② $-1 \le a < 0$ ③ $-2 \le a < -1$

④ $-1 \le a < 1$ ⑤ $0 \le a < 1$

해설

그림처럼 ①,② 사이에 있어야 교점이 두 개다.



① 접할 때

$\frac{1}{2}x + a = \sqrt{2x-4}$

$x^2 + 4(a-2)x + 4a^2 + 16 = 0$

$\frac{D}{4} = 2^2(a-2)^2 - 4a^2 - 16 = 0, \ \therefore a = 0$

② 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$0 = \frac{1}{2} \times 2 + a \quad \therefore \ a = -1$

$-1 \le a < 0$

12. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만날 때, 실수 m 의 값의 범위는?

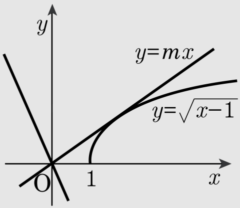
① $0 < m \le \frac{1}{2}$　② $0 \le m < \frac{1}{2}$　③ $0 \le m \le \frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2} \le m < 0$　⑤ $-\frac{1}{2} \le m \le 0$

해설

$y = \sqrt{x-1}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼평행이동한 것이고
또 $y = mx$ 는 원점을 지나는 직선이다.
다음 그림에서 곡선과 직선이 접하기 위해서는
$mx = \sqrt{x-1}$ 이 중근을 가져야 한다.
즉 $m^2x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$D = 1 - 4m^2 = 0, \therefore\ m = \frac{1}{2} (\because\ m > 0)$



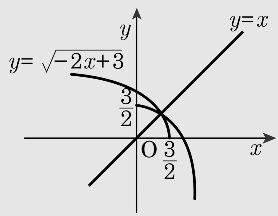
또한 $m = 0$ 일 때는 곡선과 직선이 점 $(1,\ 0)$ 에서 만난다.
따라서 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$ 과 $y = mx$ 의 그래프가 만나기 위한 m 의 값의 범위는

$\therefore 0 \le m \le \frac{1}{2}$

13. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -6　　② -4　　③ -2　　④ 0　　⑤ 2

해설



함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는

직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$의 그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$의 그래프와

직선 $y = x$의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$의 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $0 \le x \le \dfrac{3}{2}$ 이므로 $x=1,\ y=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

14. 곡선 $y^2-2y+4x-3=0$에 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a의 값을 정하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

곡선 $y^2-2y+4x-3=0$에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점$(a,\ 0)$ 을 지나므로 $y=m(x-a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$(mx-am)^2-2(mx-am)+4x-3=0$

$m^2x^2-2(am^2+m-2)x+a^2m^2+2am-3=0$

$\dfrac{D}{4}=(am^2+m-2)^2-m^2(a^2m^2+2am-3)=0$

정리하면, $(1-a)m^2-m+1=0$

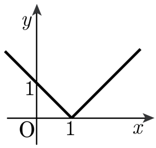
m의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

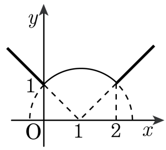
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$이어야 하므로

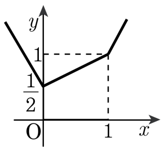
$\alpha\beta=\dfrac{1}{1-a}=-1$

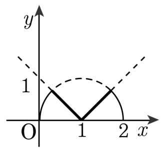
$\therefore a=2$

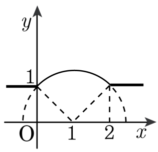
15. 함수 $y = \sqrt{1 + |2x - x^2|}$ 의 그래프는 ?

①


②


③


④


⑤


해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$

즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 2$

이 때, $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$ 의 양변을 제곱하면,

$y^2 = 1 + 2x - x^2 \ (y \geq 0)$

$(x-1)^2 + y^2 = 2 \ (y \geq 0) \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,

$x < 0$ 또는 $x > 2$

이 때,

$y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$

$= \sqrt{(x-1)^2}$

$= |x - 1| \cdots\cdots\cdots$ ㉡

(i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.