

1. 정의역이 X 인 두 함수 $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2 - 2x$ 가 서로 같은 함수일 때, 집합 X 로 적당한 것은?

① $\{-1, 0, 1\}$

② $\{0, 1, 2\}$

③ $\{1, 2, 3\}$

④ $\{-2, 0, 2\}$

⑤ $\{0, 1, 4\}$

해설

$$f(x) = g(x) \text{ 에서}$$

$$x^3 = 3x^2 - 2x, x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0, x(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2, 1$$

따라서 집합 X 로 적당한 것은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

2. 집합 $X = \{-1, 1, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = -x + k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(-1) = 1 + k$$

$$f(1) = -1 + k$$

$$f(3) = -3 + k$$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$$\therefore X = \{1 + k, -1 + k, -3 + k\}$$

그런데 $-3 + k < -1 + k < 1 + k$ 이므로

$X = \{-1, 1, 3\}$ 에서

$$-3 + k = -1, \quad -1 + k = 1, \quad 1 + k = 3$$

$$\therefore k = 2$$

3. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x \text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

- ① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

- (i) x 가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$
(ii) x 가 무리수일 때,
 $f(x) = 3-x$ 로 무리수이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3-x) = x$
(i), (ii) 에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

4. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3

② $\frac{8}{3}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

⑤ 7

해설

$$\frac{x+1}{x-2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x+1 = tx-2t, (t-1)x = 2t+1$$

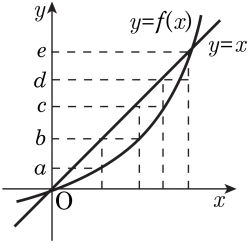
$$\therefore x = \frac{2t+1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{3 \times \frac{2t+1}{t-1} + 4}{\frac{2t+1}{t-1} + 1} = \frac{10t-1}{3t}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

5. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) = d\end{aligned}$$

6. 다음에서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수를 모두 고른 것은?

$\textcircled{\text{㉠}} f(x) = -x + 7$	$\textcircled{\text{㉡}} f(x) = \frac{3}{2}x$
$\textcircled{\text{㉢}} f(x) = -\frac{2}{x}$	$\textcircled{\text{㉣}} f(x) = x - 1$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 인지 확인한다.
 $\textcircled{\text{㉠}} (f \circ f)(x) = x$
 $\textcircled{\text{㉡}} (f \circ f)(x) = \frac{9}{4}x$
 $\textcircled{\text{㉢}} (f \circ f)(x) = x$
 $\textcircled{\text{㉣}} (f \circ f)(x) = x - 2$
따라서 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수는 ㉠, ㉢이다.

7. 함수 $y = \frac{3}{x}$ 을 적당히 이동하였을 때 겹치지 않는 것은?

① $y = \frac{3}{x} + 2$

② $y = \frac{3}{x-2}$

③ $y = \frac{-4x+11}{x-2}$

④ $y = \frac{x+3}{x-1}$

⑤ $y = \frac{2x-1}{x-2}$

해설

① $y = \frac{3}{x} + 2$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

② $y = \frac{3}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

$$\textcircled{3} \ y = \frac{-4x+11}{x-2} = \frac{-4(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 4$$

따라서 이 함수는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로
-4만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{4} \ y = \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 1 \text{ 는}$$

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

$$\textcircled{5} \ y = \frac{2(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 2 \text{ 는}$$

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

8. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나고 $x = 1, y = 2$ 를 점근선으로 할 때 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가

$x = 1, y = 2$ 를 점근선으로 하므로

$y = \frac{k}{x-1} + 2$ 로 놓을 수 있다.

이것이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$2 = -k + 2 \quad \therefore k = 0$

따라서 $y = \frac{2(x-1)}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1}$ 에서

$a = 2, b = -2, c = -1$

$\therefore a + b + c = 2 - 2 - 1 = -1$

9. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.

㉡ 두 점근선의 교점은 (2, 1)이다.

㉢ 두 직선 $y = -x + 3$, $y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

- ① ㉡

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

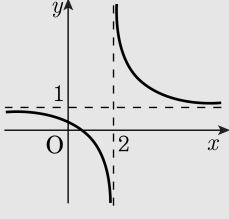
해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

㉡ 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 이므로 교점은 (2, 1)

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축으로 2, y 축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 (2, 1)을 지나는 직선이다.

$\Rightarrow y = x - 1, y = -x + 3$

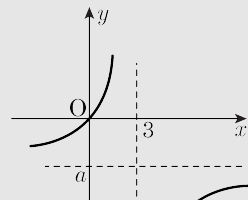


10. $0 \leq x \leq 2$ 에서, 유리함수 $y = \frac{-9}{x-3} + a$ 의 최솟값이 0이다. a 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

점근선이 $x = 3, y = a$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 최솟값이 0이므로
점 $(0, 0)$ 을 지난다.



$$0 = \frac{-9}{0-3} + a$$
$$\therefore a = -3$$

11. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100 \text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100 \text{일때}) \end{cases} \quad \text{에서 } f(96) \text{의 값을 구하면?}$$

① 78

② 80

③ 98

④ 99

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} f(96) &= f(f(100)), \quad f(100) = 98, \\ f(98) &= f(f(102)), \quad f(102) = 100 \\ \therefore f(96) &= 98 \end{aligned}$$

12. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x) \ (x = 1, 2, 3, \dots)$
(ii) $f(2x + 1) = 2^x \ (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,
 $f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \dots = f(5)$
 $= f(2 \cdot 2 + 1)$ 이므로,
 $f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$

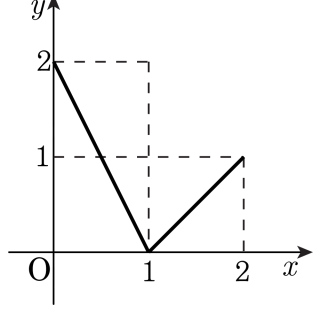
13. 두 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

- ① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개
④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1, 2\}$ 이고 $Y = \{a, b, c, d, e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
 a, b, c, d, e 5 가지
 $f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지
 $\therefore 5 \times 4 = 20(\text{개})$

14. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



$f \circ f = f^2, f \circ f^2 = f^3, \dots, f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

- ① $\frac{1}{3}$
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

그림에서

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (0 \leq x \leq 1) \\ x - 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad \text{이므로,}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

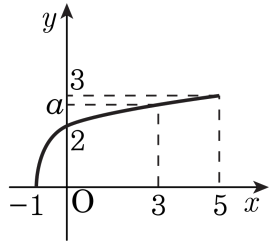
$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

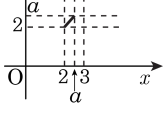
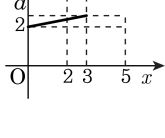
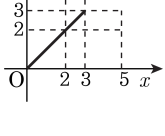
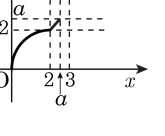
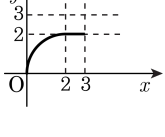
$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

15. 실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?



- ① 
- ② 
- ③ 
- ④ 
- ⑤ 

해설

실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다. 따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$)가 되고 치역은 $2 \leq y \leq a$ 이다.

16. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

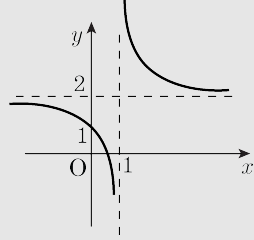
$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로
 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$
 $((g \circ f) \circ g)(x) = (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3)$
 $= g(f(x - 3))$
 $= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5)$
 $= (2x - 5) - 3 = 2x - 8$
 $2x - 8 = ax + b$ 에서 $a = 2, b = -8$
 $\therefore a + b = -6$

17. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을
바르게 구한 것은?

- ① $\{x \mid 0 < x < 1\}$ ② $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$
 ③ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ ④ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
 ⑤ $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

해설

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$



$y = 1$ 일 때, $1 = \frac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

18. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

- ① -1
- ② 1
- ③ 3
- ④ 5
- ⑤ 7

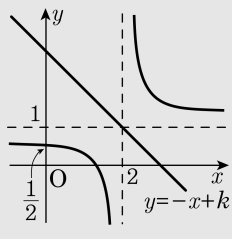
해설

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$
$$= \frac{(x-2)+1}{x-2}$$
$$= \frac{1}{x-2} + 1$$

따라서, 점근선이 $x = 2, y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음과 같다.

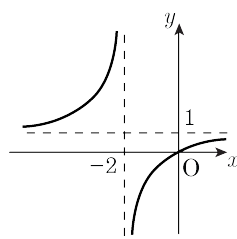
다음 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭이라면 직선이 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$1 = -2 + k$$
$$\therefore k = 3$$



19. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y = 1 + \frac{k}{x+2}$, ($k \neq 0$)가 점 (0, 0)을 지나므로

$$0 = 1 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 1 + \frac{-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

20. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$$\frac{x+2}{x-1} = x, \quad x+2 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$A(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), B(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$