1. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$$

2. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$을 2^{k} 꼴로 나타낼 때 k는?

① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{23}{24}$ ⑤ 1

해설

$\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$

$=\left\{2\times(4\times8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{2\times(2^{2}\times2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=\left\{2\times(2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=(2\times2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{23}{24}}$

$\therefore k=\frac{23}{24}$

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^2 \div a^{-3} \times a^4 = a^9$

② $(a^{-3})^2 \times (a^2)^{-4} = a^{-14}$

③ $\dfrac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = a^{-2}$

④ $\dfrac{(a^3)^{-2}}{a^5 \times a^2} = a^{-16}$

⑤ $\dfrac{a^3 \times a^{-4}}{a^2 \times a^{-5}} = a^9$

해설

③ $\dfrac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = \dfrac{a^{-1}}{a^2} = a^{-1-2} = a^{-3}$

4. $a > 0$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$을 간단히 하면?

① a　② $\sqrt{a}$　③ $a\sqrt[7]{a^5}$　④ $\sqrt[8]{a^5}$　⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}} = (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$$

5. $3^x = 2$일 때, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$

6. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 4017

해설

(준식)$= |-2014| + (-2015) = -1$

7. 등식 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}} = 27$을 만족하는 양수 a의 값은?

① 3 ② 3^2 ③ 3^3 ④ 3^6 ⑤ 3^9

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}} &= \left\{a(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= (a\cdot a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$a^{\frac{1}{3}} = 3^3$이므로 $(a^{\frac{1}{3}})^3 = (3^3)^3$

$\therefore a = 3^9$

8. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$
$= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5$
$\therefore x = 5$

9. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

10. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

11. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$
$$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$$
$$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{7}$$

12. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16　② 64　③ 256

④ 1024　⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$

$2^{10} = 1024,\ 2^6 = 64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$

13. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.

② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

③ n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개다.

④ n이 짝수일 때, 16의 n제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

해설

$x^n = a$인 실수 x의 개수는 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때, 실수 x는 $\sqrt[n]{a}$로 1개 이다.
(ii) n이 짝수일 때,
$a > 0 \rightarrow$ 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{a}$로 2개 이다.
$a = 0 \rightarrow$ 실수 x는 0이므로 1개 이다.
$a < 0 \rightarrow$ 실수 x는 존재하지 않는다.
① $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
② $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
③ n이 홀수이므로 실수인 n제곱근은 1개
④ n이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n제곱근은 2개
⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$이므로 실수인 n제곱근은 존재하지 않는다.

14. 임의의 실수 x의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x)$라 할 때, $f(2^{-2})+f(-2^2)+f(2^0)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2^{-2}=\frac{1}{4}>0,\ -2^2=-4<0,\ 2^0=1>0$이고 4는 짝수이므로

$f(2^{-2})+f(-2^2)+f(2^0)$

$=2+0+2$

4

15. $a>0$일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$ ② $\sqrt[3]{a}$ ③ $\sqrt[3]{a^2}$ ④ $\sqrt[4]{a}$ ⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{a}}=\sqrt[6]{a}$

16. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$

따라서 $a+b=13$이다.

17. $a=2^{12}$일 때, $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{24}}\times a^{\frac{1}{24}}=a^{\frac{1}{12}}$

$a=2^{12}$이므로

$a^{\frac{1}{12}}=(2^{12})^{\frac{1}{12}}=2$

18. 세 수 $A=\sqrt[3]{4},\ B=\sqrt[4]{6},\ C=\sqrt[6]{13}$의 대소를 비교하면?

① $A>B>C$ ② $B>A>C$ ③ $C>B>A$

④ $A>C>B$ ⑤ $B>C>A$

해설

$A=\sqrt[3]{4},\ B=\sqrt[4]{6},\ C=\sqrt[6]{13}$을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

$3, 4, 6$의 최소공배수가 12이므로

$A=\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

$B=\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$

$C=\sqrt[6]{13}=\sqrt[12]{13^2}=\sqrt[12]{169}$

$\therefore A>B>C$

19. 임의의 양수 a, b에 대하여 $\circ$를 $a \circ b = a^b$ 으로 정의한다. a, b, c, n이 모두 양수일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \circ b = b \circ a$
② $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
③ $(a \circ b^n) = (a \circ n) \circ b$
④ $(a \circ b)^n = a \circ (bn)$
⑤ $(a^n \circ b)(a \circ b^n)$

해설

① $a^b \neq b^a$
② $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$
③ $a^{b^n} \neq (a^n)^b = a^{nb}$
④ $(a^b)^n = a^{bn} = a^{bn}$
⑤ $(a^n)^b = a^{nb} \neq a^{b^n}$

20. $2^{2x}+2^{-2x}=5$일 때, $2^{3x}+2^{-3x}$의 값은?

① 10　② $4\sqrt{7}$　③ 12　④ 15　⑤ $6\sqrt{7}$

해설

$(2^{2x}+2^{-2x})^3$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-2x}(2^{2x}+2^{-2x})$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\times 5$

$2^{6x}+2^{-6x}=5^3-15=110$

$\therefore (2^{3x}+2^{-3x})^2$

$=2^{6x}+2^{-6x}+2$

$=112$

$2^{3x}+2^{-3x}>0$이므로 $2^{3x}+2^{-3x}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

21. $4^x = 3 + 2\sqrt{2}$일 때, $16^x + 16^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34

해설

$4^x = 3 + 2\sqrt{2}$이므로

$4^{-x} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$

$4^x + 4^{-x} = 6,\ 4^x \cdot 4^{-4x} = 1$이므로

$16^x + 16^{-x} = (4^x)^2 + (4^{-x})^2$

$= (4^x + 4^{-x})^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x}$

$= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34$

22. 함수 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ (단, $a\neq 1$인 양수)에 대하여 $f(\alpha)=\dfrac{1}{3}$, $f(\beta)=\dfrac{1}{2}$일 때, $f(\alpha+\beta)$의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

해설

$f(\alpha)=\dfrac{a^\alpha-a^{-\alpha}}{a^\alpha+a^{-\alpha}}=\dfrac{1}{3}$

$3a^\alpha-3a^{-\alpha}=a^\alpha+a^{-\alpha}$

$\therefore a^\alpha=2a^{-\alpha}$

또, $f(\beta)=\dfrac{a^\beta-a^{-\beta}}{a^\beta+a^{-\beta}}=\dfrac{1}{2}$

$2a^\beta-2a^{-\beta}=a^\beta+a^{-\beta}\ \therefore a^\beta=3a^{-\beta}$

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta)&=\frac{a^{\alpha+\beta}-a^{-\alpha-\beta}}{a^{\alpha+\beta}+a^{-\alpha-\beta}}\\ &=\frac{a^\alpha a^\beta-a^{-\alpha}a^{-\beta}}{a^\alpha a^\beta+a^{-\alpha}a^{-\beta}}\\ &=\frac{6a^{-\alpha}a^{-\beta}-a^{-\alpha}a^{-\beta}}{6a^{-\alpha}a^{-\beta}+\alpha^{-\alpha}a^{-\beta}}\\ &=\frac{5a^{-\alpha}a^{-\beta}}{7a^{-\alpha}a^{-\beta}}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

23. 0이 아닌 두 수 a, b가 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$이고, $2^a=5^b$을 만족할 때, $2^a=5^b=\square$이다. $\square$안에 알맞은 수는?

① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ 10 ⑤ 100

해설

$2^a=5^b=k$로 놓으면
$2^a=k$ 에서 $2=k^{\frac{1}{a}}\cdots$㉠
$5^b=k$ 에서 $5=k^{\frac{1}{b}}\cdots$㉡
㉠, ㉡ 을 변끼리 곱하면
$10=k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 이므로
$10=k^{\frac{1}{2}}\ \therefore k=10^2=100$

24. 어떤 휴대용 계산기에서 근호 ($\sqrt{\ }$)가 표시된 키(key)를 누르면, 계산기는 화면에 나타난 수의 양의 제곱근의 근삿값을 화면에 나타낸다. 또, x^{-1}가 표시된 키(key)를 누르면, 화면에 나타난 수의 역수를 화면에 나타낸다. 화면에 3이 나타나 있을 때, 근호($\sqrt{\ }$)키와 x^{-1} 키를 번갈아가면서 세 번씩 누를 때, 화면에 나타난 수는 어떤 수의 근삿값인가?

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ③ $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ④ $\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$

해설

$(\sqrt{3})^{-1} = 3^{\frac{-1}{2}}$

$\left\{(3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{8}}$

25. $0 < a < 1$이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$일 때, $\dfrac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$의 값은?

① $-\sqrt{15}$ ② $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$

$\therefore a + a^{-1} = 8$

$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$

$0 < a < 1$이므로 $a - a^{-1} = a - \dfrac{1}{a} < 0$

$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$

$\therefore \dfrac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\dfrac{2\sqrt{15}}{8} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$