

1. 식 $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8}$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{48} \times \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4\sqrt{3} \times 2 = 8$$

2. $\sqrt{2^3\sqrt{4^4\sqrt{8}}}$ 을 2^k 꼴로 나타낼 때 k 는?

① $\frac{11}{12}$

② $\frac{11}{24}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{23}{24}$

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{2^3\sqrt{4^4\sqrt{8}}} \\ &= \left\{ 2 \times (4 \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2 \times (2^2 \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2 \times (2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 \times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}} \\ \therefore k &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^2 \div a^{-3} \times a^4 = a^9$

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = a^{-2}$

⑤ $\frac{a^3 \times a^{-4}}{a^2 \times a^{-5}} = a^9$

② $(a^{-3})^2 \times (a^2)^{-4} = a^{-14}$

④ $\frac{(a^3)^{-2}}{a^5 \times a^2} = a^{-16}$

해설

③ $\frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{-2} \times a^4} = \frac{a^{-1}}{a^2} = a^{-1-2} = a^{-3}$

4. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt[4]{a^5}}$ 을 간단히 하면?

- ① a ② \sqrt{a} ③ $a \sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{a} \sqrt[4]{a^5}} &= (a^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}\end{aligned}$$

5. $3^x = 2$ 일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$$

6. ${}^{2014}\sqrt{(-2014)^{2014}} + {}^{2015}\sqrt{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 4017

해설

$$(\text{준식}) = |-2014| + (-2015) = -1$$

7. 등식 $\sqrt[4]{a \sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} = 27$ 을 만족하는 양수 a 의 값은?

① 3

② 3^2

③ 3^3

④ 3^6

⑤ 3^9

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a \sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} &= \left\{ a \left(a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a \cdot a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(a^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$a^{\frac{1}{3}} = 3^3 \text{ 이므로 } \left(a^{\frac{1}{3}} \right)^3 = (3^3)^3$$

$$\therefore a = 3^9$$

8. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

9. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라. (단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5 \text{ 이므로}$$

$$k = 5$$

10. $\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ 3

⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

11. $(3 - \sqrt{2})^{-1} \times (11 + 6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{11 + 2\sqrt{18}}} \\ &= \frac{1}{(3 - \sqrt{2}) \times (3 + \sqrt{2})} = \frac{1}{7} \\ \therefore \frac{1}{a} &= 7 \end{aligned}$$

12. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16

② 64

③ 256

④ 1024

⑤ 65536

해설

$$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$$

$2^{10} = 1024$, $2^6 = 64$ 이므로

$$\therefore 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$$

13. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.
- ② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.
- ③ n 이 홀수일 때, 5의 n 제곱근 중 실수인 것은 한 개다.
- ④ n 이 짝수일 때, 16의 n 제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.
- ⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

해설

$x^n = a$ 인 실수 x 의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때, 실수 x 는 $\sqrt[n]{a}$ 로 1개 이다.

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x 는 $\pm \sqrt[n]{a}$ 로 2개 이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x 는 0이므로 1개 이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x 는 존재하지 않는다.

① $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

② $n = 3$ 이므로 실수인 세제곱근은 1개

③ n 이 홀수이므로 실수인 n 제곱근은 1개

④ n 이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 2개

⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$ 이므로 실수인 n 제곱근은 존재하지 않는다.

14. 임의의 실수 x 의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2^{-2} = \frac{1}{4} > 0$, $-2^2 = -4 < 0$, $2^0 = 1 > 0$ 이고 4는 짝수이므로

$$f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$$

$$= 2 + 0 + 2$$

4

15. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

① \sqrt{a}

② $\sqrt[3]{a}$

③ $\sqrt[3]{a^2}$

④ $\sqrt[4]{a}$

⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} = \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} =$$

$$\sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[6]{a}$$

16. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

17. $a = 2^{12}$ 일 때, $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{12}}$$

$a = 2^{12}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{12}} = 2$$

18. 세 수 $A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$

② $B > A > C$

③ $C > B > A$

④ $A > C > B$

⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4}$, $B = \sqrt[4]{6}$, $C = \sqrt[6]{13}$ 을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$$

$$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$$

$$\therefore A > B > C$$

19. 임의의 양수 a, b 에 대하여 \circ 를 $a \circ b = a^b$ 으로 정의한다. a, b, c, n 이 모두 양수일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \circ b = b \circ a$

② $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

③ $(a \circ b^n) = (a \circ n) \circ b$

④ $(a \circ b)^n = a \circ (bn)$

⑤ $(a^n \circ b)(a \circ b^n)$

해설

① $a^b \neq b^a$

② $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$

③ $a^{b^n} \neq (a^n)^b = a^{nb}$

④ $(a^b)^n = a^{bn} = a^{bn}$

⑤ $(a^n)^b = a^{nb} \neq a^{b^n}$

20. $2^{2x} + 2^{-2x} = 5$ 일 때, $2^{3x} + 2^{-3x}$ 의 값은?

① 10

② $4\sqrt{7}$

③ 12

④ 15

⑤ $6\sqrt{7}$

해설

$$(2^{2x} + 2^{-2x})^3$$
$$= 2^{6x} + 2^{-6x} + 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-2x} (2^{2x} + 2^{-2x})$$

$$= 2^{6x} + 2^{-6x} + 3 \times 5$$

$$2^{6x} + 2^{-6x} = 5^3 - 15 = 110$$

$$\therefore (2^{3x} + 2^{-3x})^2$$

$$= 2^{6x} + 2^{-6x} + 2$$

$$= 112$$

$$2^{3x} + 2^{-3x} > 0 \text{ 이므로 } 2^{3x} + 2^{-3x} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

21. $4^x = 3 + 2\sqrt{2}$ 일 때, $16^x + 16^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34

해설

$$4^x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$4^{-x} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$4^x + 4^{-x} = 6, \quad 4^x \cdot 4^{-4x} = 1 \text{ 이므로}$$

$$16^x + 16^{-x} = (4^x)^2 + (4^{-x})^2$$

$$= (4^x + 4^{-x})^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x}$$

$$= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34$$

22. 함수 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수)에 대하여 $f(\alpha) = \frac{1}{3}$, $f(\beta) = \frac{1}{2}$ 일 때, $f(\alpha + \beta)$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{3}{5}$

③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{5}{7}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$f(\alpha) = \frac{a^\alpha - a^{-\alpha}}{a^\alpha + a^{-\alpha}} = \frac{1}{3}$$

$$3a^\alpha - 3a^{-\alpha} = a^\alpha + a^{-\alpha}$$

$$\therefore a^\alpha = 2a^{-\alpha}$$

$$\text{또, } f(\beta) = \frac{a^\beta - a^{-\beta}}{a^\beta + a^{-\beta}} = \frac{1}{2}$$

$$2a^\beta - 2a^{-\beta} = a^\beta + a^{-\beta} \therefore a^\beta = 3a^{-\beta}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \frac{a^{\alpha+\beta} - a^{-\alpha-\beta}}{a^{\alpha+\beta} + a^{-\alpha-\beta}} \\ &= \frac{a^\alpha a^\beta - a^{-\alpha} a^{-\beta}}{a^\alpha a^\beta + a^{-\alpha} a^{-\beta}} \\ &= \frac{6a^{-\alpha} a^{-\beta} - a^{-\alpha} a^{-\beta}}{6a^{-\alpha} a^{-\beta} + a^{-\alpha} a^{-\beta}} \\ &= \frac{5a^{-\alpha} a^{-\beta}}{7a^{-\alpha} a^{-\beta}} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

23. 0이 아닌 두 수 a, b 가 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ 이고, $2^a = 5^b$ 을 만족할 때,
 $2^a = 5^b = \square$ 이다. \square 안에 알맞은 수는?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{\sqrt{10}}$

③ $\sqrt{10}$

④ 10

⑤ 100

해설

$2^a = 5^b = k$ 로 놓으면

$2^a = k$ 에서 $2 = k^{\frac{1}{a}} \dots \textcircled{\Gamma}$

$5^b = k$ 에서 $5 = k^{\frac{1}{b}} \dots \textcircled{\text{L}}$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}$ 을 변끼리 곱하면

$10 = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ 이므로

$10 = k^{\frac{1}{2}} \therefore k = 10^2 = 100$

24. 어떤 휴대용 계산기에서 근호 ($\sqrt{\quad}$)가 표시된 키(key)를 누르면, 계산기는 화면에 나타난 수의 양의 제곱근의 근삿값을 화면에 나타낸다. 또, x^{-1} 가 표시된 키(key)를 누르면, 화면에 나타난 수의 역수를 화면에 나타낸다. 화면에 3이 나타나 있을 때, 근호($\sqrt{\quad}$)키와 x^{-1} 키를 번갈아가면서 세 번씩 누를 때, 화면에 나타난 수는 어떤 수의 근삿값인가?

① $\frac{1}{\sqrt{3}}$

② $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

③ $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

④ $\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$

해설

$$(\sqrt{3})^{-1} = 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{ (3^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{8}}$$

25. $0 < a < 1$ 이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 일 때, $\frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{15}$

② $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$$

$$\therefore a + a^{-1} = 8$$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} < 0$$

$$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$$

$$\therefore \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\frac{2\sqrt{15}}{8} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$