1. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$ 일 때, 원소 3 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
원소 3 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-1} = 16$ (개)
원소 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-1} = 16$ (개)
원소 3, 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{5-2} = 8$ (개)
원소 3 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$16 + 16 - 8 = 24$ (개)

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $X \subset A$, $A \cap X^c = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$A \cap X^c = A - X = \{1,\ 4\}$

1, 4는 X의 원소가 될 수 없다.

그러므로 구하는 집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$ 의 진부분집합의 개수와 같다.

$\therefore\ 2^3 - 1 = 7$(개)

3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 4\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 양의 약수}\}$에 대하여 $A \cup X = X$, $B \cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구한 것은?

① 2개　② 4개　③ 8개　④ 16개　⑤ 32개

해설

$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이고, $A \cup X = X$, $B \cap X = X$이므로 X는 B의 부분집합이면서 1, 2, 4를 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

4. 연립방정식 $\begin{cases} y = ax - b \\ y = 2ax + b \end{cases}$ 에서 $ab = 8$ 이다.

이 때, 연립방정식의 해 x, y 의 값이 정수가 되는 경우의 수를 구하면? (단, a , b 의 값은 모두 자연수이다.)

① 1 가지 ② 2 가지 ③ 3 가지

④ 4 가지 ⑤ 5 가지

해설

$\begin{cases} y = ax - b \cdots ㉠ \\ y = 2ax + b \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠에서 $x = -\dfrac{2b}{a} \cdots ㉢$

그런데 $ab = 8$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ 의 4 가지이므로 이를 ㉢에 대입하여 x 의 값을 구하면 다음과 같다.

$(1, 8)$ 일 때, $x = -\dfrac{2 \times 8}{1} = -16$

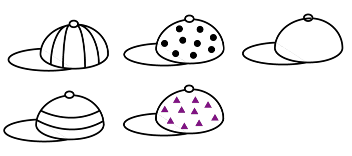
$(2, 4)$ 일 때, $x = -\dfrac{2 \times 4}{2} = -4$

$(4, 2)$ 일 때, $x = -\dfrac{2 \times 2}{4} = -1$

$(8, 1)$ 일 때, $x = -\dfrac{2 \times 1}{8} = -\dfrac{1}{4}$

따라서 x, y 의 값이 정수가 되는 경우는 모두 3 가지이다.

5. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33 ② 36 ③ 40 ④ 45 ⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_{n=}(n-1)(F_{n-1+}F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

6. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 $1, 2, 3$ 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.

이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다. ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다. ㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18 개이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡,㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는
$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ 즉, 3 개 (참)

㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(참)

㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

7. 5 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 세 자리 정수를 만들 때,9 의 배수의 개수는?

① 6　　② 12　　③ 15　　④ 18　　⑤ 24

해설

각 자리수의 합이 9 의 배수일 때 그 수는 9 의 배수가 된다. $0, 1, 2, 3, 4$ 에서 각 자리수의 합이 9 의 배수가 되는 조합은 $(2, 3, 4)$ 뿐이다. $2, 3, 4$ 를 써서 만들 수 있는 3 자리 정수는 $3! = 6$

8. 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 20의 배수가 되는 경우의 수는?

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

4 의 배수와 5 의 배수 판별법을 이용한다. 즉 끝자리가 0 이고 끝의 두 자리가 4 의 배수가 되어야 한다.

$\Rightarrow \boxed{}\boxed{}20$ 또는 $\boxed{}\boxed{}40$

$2 \times {}_3P_2 = 12$

9. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개 ② 128 개 ③ 144 개
④ 216 개 ⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.
(i) 일의 자리가 0 인 수의 개수는
나머지 다섯 자리에 $1, 2, 3, 4, 5$ 를 배열하는 순열의 수와 같으므로 $5! = 120$
(ii) 일의 자리가 5 인 수의 개수는
맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$
(i), (ii) 에서 구하는 5 의 배수의 개수는
$120 + 96 = 216$