

1. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 일 때, 원소 3 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

① 4 개

② 8 개

③ 16 개



④ 24 개

⑤ 32 개

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

원소 3 을 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-1} = 16 \text{ (개)}$$

원소 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-1} = 16 \text{ (개)}$$

원소 3, 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{5-2} = 8 \text{ (개)}$$

원소 3 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$16 + 16 - 8 = 24 \text{ (개)}$$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $X \subset A$, $A \cap X^c = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 2 개

② 4 개

③ 5 개

④ 6 개

⑤ 7 개

해설

$$A \cap X^c = A - X = \{1, 4\}$$

1, 4는 X 의 원소가 될 수 없다.

그러므로 구하는 집합은 $\{2, 3, 5\}$ 의 진부분집합의 개수와 같다.

$$\therefore 2^3 - 1 = 7(\text{개})$$

3. 집합 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 양의 약수}\}$ 에 대하여 $A \cup X = X$, $B \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구한 것은?

① 2개

② 4개

③ 8개

④ 16개

⑤ 32개

해설

$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이고, $A \cup X = X$, $B \cap X = X$ 이므로 X 는 B 의 부분집합이면서 1, 2, 4를 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} y = ax - b \\ y = 2ax + b \end{cases}$ 에서 $ab = 8$ 이다.

이 때, 연립방정식의 해 x, y 의 값이 정수가 되는 경우의 수를 구하면?
(단, a, b 의 값은 모두 자연수이다.)

① 1 가지

② 2 가지

③ 3 가지

④ 4 가지

⑤ 5 가지

해설

$$\begin{cases} y = ax - b \cdots \textcircled{㉠} \\ y = 2ax + b \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \text{에서 } x = -\frac{2b}{a} \cdots \textcircled{㉢}$$

그런데 $ab = 8$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ 의 4 가지이므로 이를 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하여 x 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$(1, 8) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 8}{1} = -16$$

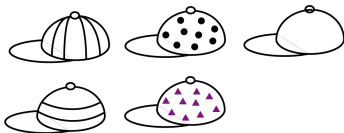
$$(2, 4) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 4}{2} = -4$$

$$(4, 2) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 2}{4} = -1$$

$$(8, 1) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 1}{8} = -\frac{1}{4}$$

따라서 x, y 의 값이 정수가 되는 경우는 모두 3 가지이다.

5. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33

② 36

③ 40

④ 45

⑤ 54

해설

n 명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$$F_n = (n-1)(F_{n-1} + F_{n-2}) \quad (n \geq 3),$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$F_3 = 2, F_4 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5F_4 = 5 \times 9 = 45$$

6. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 1, 2, 3 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.



이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다.
 ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다.
 ㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18 개이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는

(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) 즉, 3 개 (참)

㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (참)

㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

7. 5 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 써서 세 자리 정수를 만들 때, 9 의 배수의 개수는?

① 6

② 12

③ 15

④ 18

⑤ 24

해설

각 자리수의 합이 9 의 배수일 때 그 수는 9 의 배수가 된다.
0, 1, 2, 3, 4 에서 각 자리수의 합이 9 의 배수가 되는 조합은
(2, 3, 4) 뿐이다. 2, 3, 4 를 써서 만들 수 있는 3 자리 정수는
 $3! = 6$

8. 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 20의 배수가 되는 경우의 수는?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

4의 배수와 5의 배수 판별법을 이용한다. 즉 끝자리가 0이고 끝의 두 자리가 4의 배수가 되어야 한다.

⇒

--	--

20 또는

--	--

40

$$2 \times {}_3P_2 = 12$$

9. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개

② 128 개

③ 144 개

④ 216 개

⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.

(i) 일의 자리가 0 인 수의 개수는

나머지 다섯 자리에 1, 2, 3, 4, 5 를 배열하는 순열의 수와
같으므로 $5! = 120$

(ii) 일의 자리가 5 인 수의 개수는

맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$

(i), (ii)에서 구하는 5 의 배수의 개수는

$$120 + 96 = 216$$