

1. 실수 전체의 집합을 R 이라 할 때, 다음 중 R 에서 R 로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$

② $y = -x + 4$

③ $y = (x - 1)^2$

④ $x = y^2 + 4$

⑤ $y = x^3$

해설

4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$ 에서 $y = \pm 1$

즉, $x = 5$ 에 대응하는 y 의 값이

$-1, 1$ 의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

2. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

3. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

- ① $-2 \leq x \leq 1$ ② $0 \leq x \leq 1$ ③ $1 < x < 2$
④ $-1 \leq x \leq 2$ ⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$$x+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$$

$$2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2$$

$$x-1 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$$

공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 2$

4. $x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2} - 1$ 일 때,
 $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \\ & \begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases} \\ & \therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

5. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y 의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

- ① $x=2, y=-1$

② $x=-1, y=-2$

③ $x=2, y=1$

④ $x=-1, y=2$

⑤ $x=1, y=2$

해설

$$\begin{aligned} (-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2} &= -4+3\sqrt{2} \\ \begin{cases} -3x+2y &= -4 \\ x+y &= 3 \end{cases} \\ \therefore x=2, y=1 \end{aligned}$$

6. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

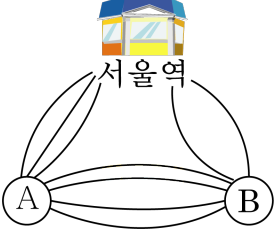
해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

7. 지점 A 에서 서울역으로 가는 길은 3 가지, 서울역에서 지점 B 로 가는 길은 2 가지가 있다. 또, A 에서 서울역을 거치지 않고 B 로 가는 길은 4 가지이다. 서울역을 한 번만 거쳐서 A 와 B 를 왕복하는 방법의 수를 구하시오.(단, A 에서 출발한다.)



▶ 답 : 가지

▶ 정답 : 48 가지

해설

- (i) $A \rightarrow \text{서울역} \rightarrow B \rightarrow A$
 : $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)
(ii) $A \rightarrow B \rightarrow \text{서울역} \rightarrow A$
 : $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)
(i), (ii) 이므로
 $24 + 24 = 48$ (가지)

8. 남학생 4 명, 여학생 6 명 중에서 반장 1 명, 부반장 1 명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 90가지

해설

$_{10}P_2 = 90$

9. 정의역이 $\{0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$, $g(0) = 1$ 에서 $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$, $g(1) = 3$ 에서 $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

10. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?
- ① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지
④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

-1

0

1

A

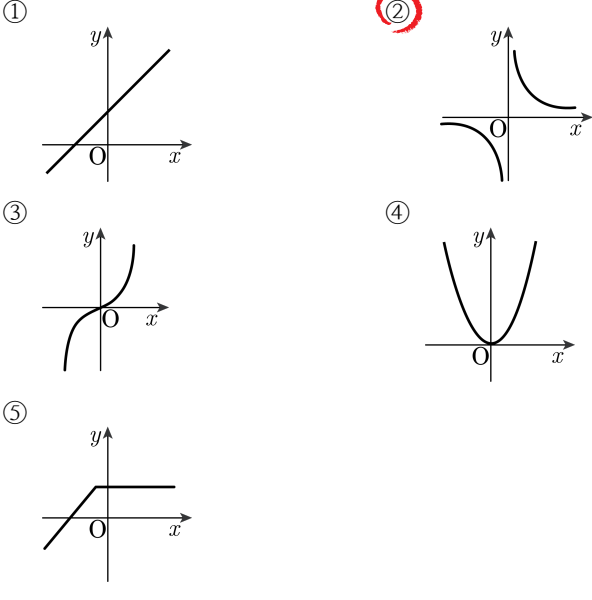
-1

0

1

①, ②를 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

11. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.
그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면
함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고
 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

12. 18000 의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는?

- ① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

해설

$$18000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$$

따라서 양의 약수 중에서 짝수인 것의 개수는

$$4 \times (2 + 1) \times (3 + 1) = 48 \text{ (개)}$$

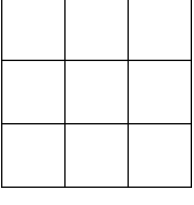
13. 100원짜리, 50원짜리, 10원짜리 세 종류의 동전으로 200원을 지불할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? (모든 종류의 동전을 사용할 필요는 없다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

(100원짜리, 50원짜리, 10원짜리) 각각의 순서쌍을 구하면
(2, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 5), (1, 0, 10), (0, 4, 0), (0, 3, 5), (0, 2, 10),
(0, 1, 15), (0, 0, 20)
∴ 9가지

14. 서로 다른 9 가지의 색으로 오른쪽 정사각형 모양의 모눈 칠판을 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 이 모눈 칠판은 회전해서 같은 모양이면 한 가지 경우로 생각한다.)



- ① $8!$
- ② $9! \times \frac{1}{2}$
- ③ $9! \times \frac{1}{3}$
- ④ $9! \times \frac{1}{4}$
- ⑤ $9!$

해설

먼저 한 가운데에 있는 정사각형을 칠하는 색을 정한 다음, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법을 생각한다. ‘가’에 칠하는 색을 고르는 방법은 9 가지가 있다. 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $\frac{8!}{4}$ 이므로

구하는 경우의 수는 $9 \times \frac{8!}{4} = \frac{9 \times 8!}{4} = 9! \times \frac{1}{4}$

15. 1, 2, 3, 4, 5 를 일렬로 나열하여 다섯 자리의 정수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 를 만들 때, $a_i = i$ 가 되지 않는 정수의 개수를 구하여라. (단, $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 44 개

해설

$a_1 = 1$ 이 아니므로 a_1 이 2, 3, 4, 5인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4, a_5 를 각각 구해보면 정수의 개수는 44 개이다.

16. A, B, C, D 4 명을 일렬로 세울 때, B 와 C 가 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 12가지

해설

B 와 C 를 하나로 보면, 세명을 일렬로 세우는 경우와 같다.
 $\Rightarrow 3! = 6$
여기에 B 와 C 가 자리를 바꾸는 방법을 곱해준다.
 $\therefore 6 \times 2 = 12$

17. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 한번씩 사용하여 네 자리의 정수를 만들 때, 양 끝이 홀수인 자연수의 개수를 구하면?

▶ 답 : 72 개

▷ 정답 : 72 개

해설

양 끝이 홀수이므로 1, 3, 5 중 2 개를 배열하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

두 홀수를 제외한 나머지 4 개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

$$\text{따라서 } 6 \times 12 = 72$$

18. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

19. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x) \ (x = 1, 2, 3, \dots)$
(ii) $f(2x + 1) = 2^x \ (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$1280 = 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,}$$
$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,}$$
$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

20. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

21. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 X 로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를 f 라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.
- ㉡ 함수 f 의 개수는 3 개이다.
- ㉢ 함수 f 는 역함수를 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로
 $f(-x) = -f(x)$ 이다. $\therefore$ 거짓
㉡ i) $f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = -1$
ii) $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$
iii) $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 로 3 개이다.
 $\therefore$ 참
㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로
역함수를 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

22. 집합 S_1, S_2, S_3 은 다음과 같다.

$$S_1 = \{1, 2\}$$

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

집합 S_1 에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2 에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3 에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 개수는?

- ① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수를 만들려면 백의 자리에는 집합 S_1 의 원소 2 개 중 하나를 선택하고 십의 자리에는 집합 S_2 의 원소 중 백의 자리에서 사용한 수를 제외한 3개의 수 중 하나를 선택한다.

마찬가지로 일의 자리에는 집합 S_3 의 원소 중 백의 자리와 십의 자리에서 사용한 수를 제외한 4 개의 수 중 하나를 선택한다.

따라서, 구하는 세 자리의 수의 개수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 24$$

23. a, b, c 는 서로 다른 수이고 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{c} = k$ 를 만족한다. 이때, $k^2 + k$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$b = ak, c = bk, a = ck$ 이므로 변끼리 곱하면 $abc = abck^3$
 $\therefore k^3 = 1 (\because abc \neq 0)$
 $\therefore (k-1)(k^2+k+1) = 0$ 에서
 $k^2+k+1 = 0$ ($\because k=1$ 이면 $a=c$ 가 되어 모순)
 $\therefore k^2+k = -1$

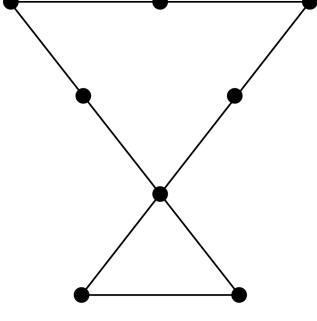
24. 분수함수 $y = \frac{kx+1}{x-1}$ ($k \neq 0$) 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① 치역은 k 을 제외한 실수 전체집합이다.
 - ② $(1, k)$ 에 대하여 대칭이다.
 - ③ 정의역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.
 - ④ 점근선은 $x = 1, y = k$ 이다.
 - ⑤ $y = -x + k$ 에 대하여 대칭이다.

해설

$$y = \frac{kx+1}{x-1} = \frac{k+1}{x-1} + k$$

- ⑤ 기울기가 ± 1 이고 점 $(1, k)$ 을 지나는 직선에 대칭이다.

25. 그림과 같이 삼각형의 두 변을 연장하여 또 다른 삼각형을 만들었다. 이 도형 위에 있는 8 개의 점 중에서 3 개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



- ① 36
- ② 47
- ③ 54
- ④ 66
- ⑤ 75

해설

8개의 점 중에서 3 개의 점을 선택하는 경우에서 직선위의 점 중 3 개를 선택하는 경우를 빼준다.

$$\Rightarrow {}_8C_3 - ({}_4C_3 + {}_4C_3 + {}_3C_3) = 47$$