

1. 두 집합 $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \rightarrow x$	㉡ $g : x \rightarrow x + 2$
㉢ $h : x \rightarrow x $	㉣ $k : x \rightarrow x^2 - 1$

- ① ㉠, ㉢
- ② ㉠, ㉡, ㉢
- ③ ㉡, ㉢, ㉣
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.
㉡ $g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.
㉢ $h(x) = |x|$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.
㉣ $k(x) = x^2-1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

2. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3(x$ 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore g(4) = -3$

$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

3. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$a \rightarrow$, $b \rightarrow$, $c \rightarrow$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 안에
넣어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,

두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,

b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,

마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가

와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$

4. $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 6xy}$ 의 값은?

① $\sqrt{3} + 1$

② $\sqrt{3} - 1$

③ $2\sqrt{3} + 1$

④ $2\sqrt{3} - 1$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$x^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{12}$$

$$6xy = 6(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 6 \text{ 을써}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 6xy} &= \sqrt{13 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{12} - 1)^2} \\ &= 2\sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

5. $f : (x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$, $g : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$ 일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 이 $g \circ f$ 에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x - 2} - 1$

② $y = \sqrt{-x - 4} + 2$

③ $y = -\sqrt{x} - 2$

④ $y = -\sqrt{x} + 2$

⑤ $y = -\sqrt{x - 2}$

해설

$y = \sqrt{-x + 2} + 1$ 은 f 에 의하여
 $y - 1 = \sqrt{-(x + 2)} + 2 + 1$
 $\therefore y = \sqrt{-x} + 2$
다시 g 에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)} + 2$
 $\therefore y = -\sqrt{x} - 2$

6. $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 구하여라.

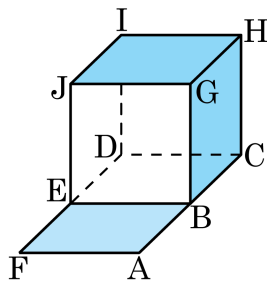
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

a, b 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
 p, q, r 중 한 개를 택하는 방법 : 3 가지
 x, y 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
전개했을 때 모든 항의 개수는
 $2 \times 3 \times 2 = 12$ (개)

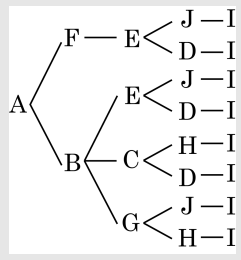
7. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A에서 I까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

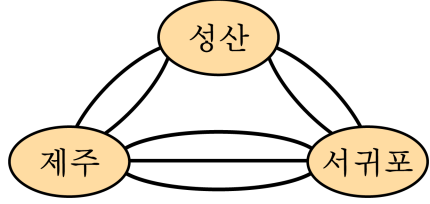
해설

A에서 I까지 최단 거리로 수행도를 그려보면



위의 수행도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

8. 다음 그림과 같이 제주와 성산을 잇는 길은 2 개, 성산과 서귀포를 잇는 길은 2 개가 있고, 제주와 서귀포를 잇는 길은 3 개가 있다. 제주에서 서귀포로 갔다가 다시 제주로 돌아올 때, 갈 때는 성산을 거치고, 올 때는 성산을 거치지 않고 오는 방법의 수는?



- ① 6 ② 8 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$(2 \times 2) \times 3 = 12$
∴ 12 가지

9. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a$, $g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

정의역 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로

$f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 가 성립한다.

$f(1) = g(1)$ 에서 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$

$\therefore a - b = -1 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(2) = g(2)$ 에서 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$

$\therefore a - 2b = -5 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 4$

$\therefore a + b = 7$

10. 세 실수 x, y, z 의 평균이 4이고, $\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5}$ 가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{9}{12}$ ③ $\frac{10}{12}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

해설

평균이 4이므로, $x + y + z = 12 \dots \textcircled{1}$

$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k$ 라 하면,

$$\begin{cases} x+y=3k \\ y+z=4k \\ z+x=5k \end{cases}$$

다 더하면, $2(x+y+z) = 12k \Rightarrow k = 2(\because \textcircled{1})$

다시 k 를 위 식에 대입하고 연립방정식의 풀면 x, y, z 를 구할 수 있다.

$x = 4, y = 2, z = 6$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

11. $\sqrt{11+2\sqrt{18}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\frac{4}{a} + \frac{2}{b}$ 의 값은?

① $2+2\sqrt{2}$

② $3+2\sqrt{2}$

③ $4+2\sqrt{2}$

④ $5+2\sqrt{2}$

⑤ $6+2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{11+2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9}+(\sqrt{2})^2)} \\ &= 3+\sqrt{2} \therefore 3+\sqrt{2}=4. \dots \\ & \therefore \text{정수 부분 } a: 4, \text{ 소수 부분 } b: \sqrt{2}-1 \\ & \Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{4}{4} + \frac{2}{\sqrt{2}-1} \\ & \qquad \qquad \qquad = 3+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

12. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 값으로 옳은 것은?

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= x + y + 2\sqrt{xy} \quad (x > 0, y > 0) \\ &= 4 + 2 = 6 \\ \therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{6} \quad (\because \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0)\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}&\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

13. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$$\therefore 72 - (36 + 24 - 12) = 24$$

$$\therefore 24 \text{ 개}$$

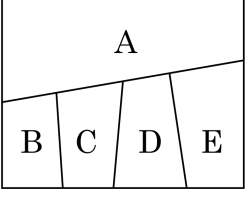
14. 50 원, 100 원, 500 원짜리 동전만 사용할 수 있는 자동판매기에서 400 원짜리 음료수 3 개를 선택하려고 한다. 세 종류의 동전을 모두 사용하여 거스름돈 없이 자동판매기에 동전을 넣는 방법의 수는? (단, 동전을 넣는 순서는 고려하지 않는다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

500 원을 기준으로 생각한다. 100 원을 A , 50 원을 B 라 하면,
(1) 500 원 1 개 :
 $(A, B) = (6, 2), (5, 4), (4, 6),$
 $(3, 8), (2, 10), (1, 12)$
(2) 500 원 2 개 : $(A, B) = (1, 2)$
∴ 총 7가지

15. 그림과 같이 구분된 A, B, C, D, E의 5부분에 서로 다른 6가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 여러 번 써도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠하려고 할 때, 칠하는 방법의 수는?



- ① 1440 ② 1920 ③ 2320 ④ 2560 ⑤ 3690

해설

A부분에 칠하는 방법은 6가지,
이 때 B에 칠하는 방법은 A에 칠한 색을 제외한
5가지이고 C에는 A, B에 칠한 색을
제외한 4가지, D에는 A, C에 칠한 색을
제외한 4가지, E에는 A, D에 칠한 색을
제외한 4가지이므로
 $6 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4 = 1920$ (가지)

16. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 사용하여 만든 6 자리의 수 중에서 5 의 배수의 개수는?

① 64 개

② 128 개

③ 144 개

④ 216 개

⑤ 256 개

해설

5 의 배수는 일의 자리에 0 이 오거나 5 가 온다.

(i) 일의 자리가 0 인 수의 개수는

나머지 다섯 자리에 1, 2, 3, 4, 5 를 배열하는 순열의 수와
같으므로 $5! = 120$

(ii) 일의 자리가 5 인 수의 개수는

맨 앞에는 0 이 올 수 없으므로 $4 \times 4! = 96$

(i), (ii)에서 구하는 5 의 배수의 개수는

$$120 + 96 = 216$$

17. 서로 다른 알파벳 a, b, c, d, e 를 사전식으로 배열하였을 때, 58 번째 단어를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $cbdea$

해설

a □ □ □ □의 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
 b □ □ □ □의 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)
 ca □ □ □의 경우의 수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지)
그 다음 55번째의 수 부터는
 $cbade, cbaed, cbdae, \dots$ 이므로
58번째 단어는 $cbdea$ 이다.

18. $A = \{-1, 0, 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다.
 $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$$3 \times 3 = 9$$

19. $\frac{2}{x} - z = 1$, $y - \frac{1}{z} = 1$ 일 때, xyz 의 값은?

① -2

② -1

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{2}{x} - z = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{z+1}$$

$$y - \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \frac{z+1}{z}$$

$$\therefore xyz = \frac{2}{z+1} \times \frac{z+1}{z} \times z = 2$$

20. 2010년 대선에 남자 4명, 여자 3명의 후보자가 나왔다. 후보자들의 합동 토론회가 끝난 후 기념 촬영을 할 때, 다음 두 조건을 만족하도록 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

(가) 특정한 남자 후보 2명을 양쪽 끝에 세운다.
(나) 남자 후보끼리 나란하지 않도록 세운다.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 24가지

해설

양쪽 끝에 특정한 2명의 남자 후보를 세우는 방법의 수는 2가지이고, 나머지 남자 후보 2명과 여자 후보 3명을 남자 후보가 나란하지 않도록 세우는 방법은 $2! \times 3!$ 이므로
구하는 방법의 수는 $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)

21. A, B 두 사람이 놀이공원에서 ‘Big3’ 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한 번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, A, B 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

- ① 840
- ② 2520
- ③ 3600
- ④ 7200
- ⑤ 14400

해설

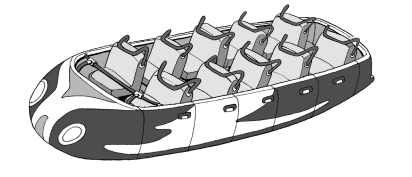
10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개를
택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$

따라서, A, B 두 사람이 이용할 수 있는 경우는
각각 120 가지이므로 구하는 경우의 수는

$$120 \times 120 = 14400$$

22. 남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2 개의 의자가 있고 모두 5 줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2 명씩 같은 줄에 앉을 때, 4 명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 80 가지

해설

남학생을 A, B 라 하고, 여학생을 a, b 라 하면
짝을 이루는 방법은 $(Aa, Bb), (Ab, Ba)$ 두 가지가
있다. 이때, 5 줄 중 2 줄에 앉아야 하고 각 줄에서
남학생과 여학생이 자리를 바꿀 수 있으므로
 $2 \times {}_5C_2 \times 2 \times 2 = 80$

23. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

- (i) $i \neq j$ 일 때 $f(i) \neq f(j)$,
(ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\rightarrow (a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 1, 4$$

$$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b - 1)(b - 4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4 (\because 0 < a < b)$$

$$\therefore a + b = 5$$

24. 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ 가 있다.
 $(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은 ?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} = y \text{ 의 역함수는 } x = \sqrt{y} \\ \therefore g^{-1}(x) &= x^2 \ (x > 0) \\ (f \circ g^{-1})(a) &= f(a^2) \\ &= a^4 - 2a^2 = -1 \\ (a^2 - 1)^2 &= 0 \\ \therefore a &= 1 \leftarrow \text{정의역이 } \{x \mid x > 0\} \\ (g \circ f)(4a) &= g(f(4)) = g(8) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} (f \circ g^{-1})(a) &= -1 \text{ 에서 } g^{-1}(a) = k \text{ 라 하면} \\ f(k) &= k^2 - 2k = -1, (k - 1)^2 = 0, k = 1 \text{ 이므로} \\ g^{-1}(a) &= 1 \Leftrightarrow g(1) = a \\ g(1) &= \sqrt{1} = a \\ \therefore (g \circ f)(4a) &= g(f(4a)) = g(f(4)) \\ &= g(4^2 - 2 \times 4) = g(8) = \sqrt{8} \end{aligned}$$

25. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} - \frac{x+5}{x+4} + \frac{x+6}{x+5}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{2(2x-1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
② $\frac{2(2x+1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
③ $\frac{2(2x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
④ $\frac{2(x+5)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$
⑤ $\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) \\&\quad - \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+5}\right) \\&= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} \\&= \frac{2x+7}{(x+2)(x+5)} - \frac{2x+7}{(x+3)(x+4)} \\&= \frac{(2x+7)(x^2+7x+12-x^2-7x-10)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} \\&= \frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}\end{aligned}$$