

1. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 제 1, 3 사분면만을 지난다.

㉡ 두 점근선의 교점은 (2, 1) 이다.

㉢ 두 직선 $y = -x + 3$, $y = x - 1$ 에 대해 대칭인 곡선이다.

① ㉡

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 다음 그림의 개형을 가지므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

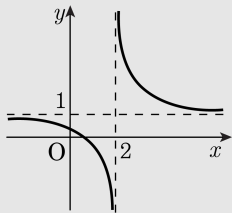
㉡ 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 이므로 교점은 (2, 1)

㉢ 주어진 분수함수가 $y = \frac{1}{x}$ 을 x 축으로

2,

y 축으로 1만큼 평행이동 시킨 것이므로 대칭되는 직선은 기울기가 ± 1 이고 (2, 1)을 지나는 직선이다.

$\Rightarrow y = x - 1, y = -x + 3$



2. $8 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore a = 15$$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 15 + 0 = 15$$

3. 216 과 360 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8 개

② 9 개

③ 12 개

④ 15 개

⑤ 16 개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

$$216 = 2^3 \times 3^3,$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ 에서}$$

$$\text{G.C.D.} : 2^3 \times 3^2$$

$$\text{따라서 공약수의 개수는 } (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$$

4. 10000 원짜리 지폐 2 장, 5000 원짜리 지폐 2 장, 1000 원짜리 지폐 3 장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수는?

①

27

② 35

③ 42

④ 60

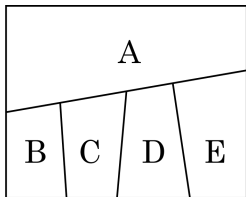
⑤ 81

해설

5000 원짜리 2 장으로 지불할 수 있는 방법이 10000 원짜리 지폐 1 장으로 지불할 수 있는 방법과 같으므로 10000 원짜리 지폐 2 장을 5000 짜리 지폐 4 장으로 바꾸면, 5000 짜리 지폐 6 장, 1000 원짜리 지폐 3 장으로 지불할 수 있는 방법과 같다.

$$\therefore 7 \times 4 - 1 = 27$$

5. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 빨강, 노랑, 파랑, 검정, 주황의 색 연필로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접하는 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 120

② 150

③ 180

④ 360

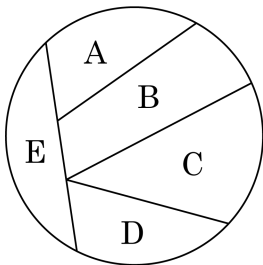
⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지 이고 나머지는 모두 3 가지씩 선택 할 수 있다.

$$\therefore 5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$$

6. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160

② 270

③ 360

④ 420

⑤ 540

해설

주어진 그림에서 E 에 칠할 수 있는 색은 5 가지,
 A 에 칠할 수 있는 색은 E 에 칠한 색을 제외한
 4 가지, B 에 칠할 수 있는 색은 E, A 에
 칠한 색을 제외한 3 가지이다.

C 와 D 역시 E, A 에 칠한 색을 제외한 3 가지 색으로 칠할 수
 있으므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540 \text{ (가지)}$$

7. 다음은 서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 꺼내어 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하는 과정이다.

(i) n 개에서 특정한 1 개를 뺀 나머지에서 r 개를 꺼내어 배열한다.

(ii) n 개에서 특정한 1 개를 포함하여 r 개를 꺼내어 배열한다.

(i), (ii)는 배반이므로,

$$\therefore {}_nP_r = \boxed{(\text{가})} + \boxed{(\text{나})}$$

위의 과정에서 $\boxed{(\text{가})}$, $\boxed{(\text{나})}$ 에 들어갈 알맞은 식은?

① (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

② (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_nP_{r-1}$

③ (가): ${}_nP_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

④ (가): ${}_{n-1}P_r \times r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

⑤ (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1} \times r$

해설

(i) 에서 ${}_{n-1}P_r \leftarrow (\text{가})$

(ii) 에서 특정한 1 개를 포함시켜 r 개를 꺼내려면

$n-1$ 개에서 $r-1$ 개를 꺼내어 배열한 다음

$({}_{n-1}P_{r-1})$, 특정한 1 개를 다시 이것들과 배열시키는 것을 생각한다.

따라서 ${}_{n-1}P_{r-1} \times r \leftarrow (\text{나})$

8. IMPORT의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, I와 T가 양 끝에 오는 경우의 수는?

① 36

② 42

③ 48

④ 54

⑤ 60

해설

I와 T를 양 끝에 오게 하는 경우의 수 : 2

나머지 문자를 배열하는 경우의 수 : 4!

$$4! \times 2 = 48$$

9. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times \times 0$ 의 꼴 $\rightarrow 4 \times 4$, $\times \times 2$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$, $\times \times 4$ 의 꼴 $\rightarrow 3 \times 3$

따라서 짝수의 개수는 $4 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 3 = 34$ (개)

10. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 이 적혀 있는 7 개의 카드 중에서 서로 다른 5 개의 카드를 뽑아 나열한다. 이 때, 위의 그림의 예와 같이 첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상이 되도록 나열하는 방법의 수는?



① 120

② 180

③ 240

④ 300

⑤ 360

해설

첫 번째 카드와 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이면서 마지막 다섯 번째 카드에 적힌 숫자가 3 이상인 경우는 1 - 7, 2 - 6, 3 - 5, 5 - 3 의 4 가지이다.

이 4 가지 경우에 대하여 각각 중앙에 남은 세 자리에 5 개의 수 중에서

3 개를 택하여 나열하는 방법의 수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 방법의 수는 $4 \times 60 = 240$ (가지)

11. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개

② 18 개

③ 20 개

④ 24 개

⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)

그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x) \neq x$ 인 것은

$\therefore 24 - 6 = 18$ (가지)

12. 실수에서 정의된 함수 $f_1(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ (단, n 은 자연수)에 대하여, 방정식 $f_{2008}(x) = \frac{1}{2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f_2(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

$$f_4(x) = f_1(x)$$

$\vdots$

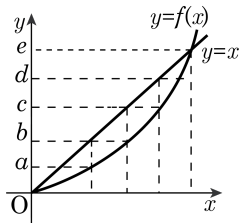
2008 = 3 × 669 + 1 이므로

$$\therefore f_{2008}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2$$

13. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$$

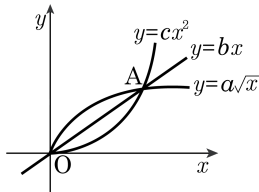
$$f^{-1}(b) = k \text{ 라고 하면, } f(k) = b$$

$$\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$$\text{또, } f^{-1}(c) = t \text{ 라고 하면, } f(t) = c$$

$$\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$$

14. 양의 상수 a, b, c 에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x}$, $y = bx$, $y = cx^2$ 의 그래프가 그림과 같이 원점 O 와 다른 점 A 에서 동시에 만날 때, a, b, c 의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$

② $a^3 = bc^2$

③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$

⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$ 과 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$$\therefore x = \frac{b}{c}$$

곡선 $y = a\sqrt{x}$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는

$$a\sqrt{x} = bx \therefore x = \frac{a^2}{b^2}$$

두 점이 일치하므로 $\frac{b}{c} = \frac{a^2}{b^2}$

$$\therefore b^3 = a^2c$$

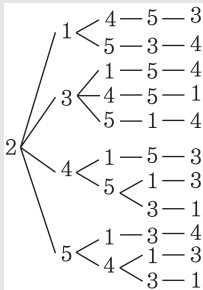
15. 1, 2, 3, 4, 5 를 일렬로 배열할 때 i 번째 숫자를 $a_i (1 \leq i \leq 5)$ 라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 경우의 수는 몇 가지인지 구하시오.

▶ 답 :

가지

▷ 정답 : 44 가지

해설



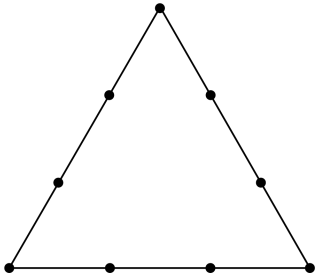
$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 것은 $a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ 인 것을 뜻한다.

$a_1 \neq 1$ 이므로 $a_1 = 2, 3, 4, 5$ 인 경우에 따라서 조사한다.

$a_2 \neq 2$ 인 경우 $a_2 = 1, 3, 4, 5$ 의 네 가지 경우가 있으며, 위 수형도와 같이 조사해 보면 모두 11 가지가 있다.

$a_1 = 3, 4, 5$ 인 경우도 마찬가지이므로 구하는 모든 경우의 수는 $4 \times 11 = 44$ (가지)

16. 그림과 같이 같은 간격으로 놓인 9 개의 점 중에서 3 개의 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 64

② 68

③ 72

④ 76

⑤ 80

해설

9 개의 점에서 3 개의 점을 선택하는 가지 수에서 직선 위 4 개의 점 중 3 개의 점을 선택하는 경우의 수를 빼준다.

$${}_9C_3 - ({}_4C_3 \times 3) = 72$$

17. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 가 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에서 정의되어 있을 때, $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X 의 원소의 개수를 a 개라 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 4개

해설

$f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면

$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 에서 $(x+2)$ 가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$ 가 2의 배수인 x 는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

1) $(x+2)$ 가 4의 배수일 경우 : $x = 2, 6, 10$

2) $(x-1)$ 이 4의 배수일 경우 : $x = 1, 5, 9$

$\therefore x = 1, 2, 5, 6, 9, 10$

따라서 $f(x)$ 가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.

$\therefore a = 4$

18. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x) + f(1-x) = x^4 - 2x$ 에서

$x = 2$ 를 대입하면

$$4f(2) + f(-1) = 12 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = -1$ 을 대입하면

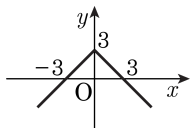
$$f(-1) + f(2) = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면 $3f(2) = 9$

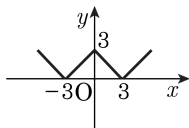
$$\therefore f(2) = 3$$

19. $f(x) = 3 - |x|$, $g(x) = |x| - 3$ 일 때, 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는?

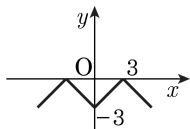
①



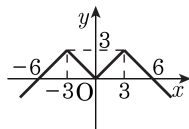
②



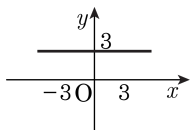
③



④



⑤

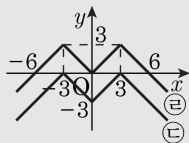
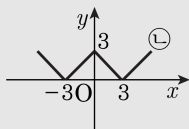
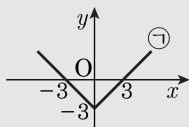


해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 - ||x| - 3|$ 이므로

$y = |x| - 3$ 의 그래프는 ㉠

$y = ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉡



$y = -||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉣

$y = 3 - ||x| - 3|$ 의 그래프는 ㉤

20. 함수 $f(x) = x|x| + k$ (k 는 상수) 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라고 할 때, $f^{-1}(4) = -1$ 이다. 이때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② $-\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{6}$

⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$$f^{-1}(4) = -1 \text{ 에서 } f(-1) = 4$$

$$f(-1) = -1 + k = 4 \text{ 에서 } k = 5$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 5 & (x < 0) \end{cases}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4)) = f^{-1}(-1) = a \text{ 로 놓으면 } f(a) = -1$$

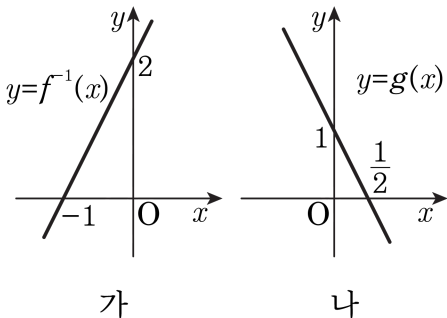
$$\text{이 때, } f(a) < 0 \text{ 이므로 } a < 0$$

$$\text{따라서, } f(a) = -a^2 + 5 = -1 \text{ 이므로}$$

$$a = -\sqrt{6} \text{ (} \because a < 0 \text{)}$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = -\sqrt{6}$$

21. 다음의 그림 (가)는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나)는 함수 g 의 그래프이다.



다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

- ① $y = -f(x+1)$ ② $y = f(x-1)$ ③ $y = -f(x-1)$
 ④ $y = f(x+1)$ ⑤ $y = -f(1-x)$

해설

그림 (가)의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
 그림 (나)의 그래프와 일치한다.

즉, $y = f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
 $y = f^{-1}(-x) \cdots \textcircled{㉠}$ 이다.

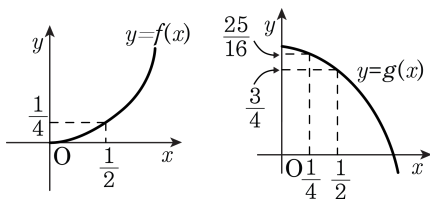
$\textcircled{㉠}$ 을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
 $y = f^{-1}(-x) - 1 \cdots \textcircled{㉡}$ 이다.

$\textcircled{㉡}$ 의 역함수는 $x = f^{-1}(-y) - 1 \cdots \textcircled{㉢}$ 이므로
 $\textcircled{㉢}$ 에서 $f^{-1}(-y) = x + 1$ 이다.

$$\therefore y = -f(x+1)$$

$$\therefore g^{-1}(x) = -f(x+1)$$

22. 정의역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $x > 0$ 일 때의 그래프가 다음 그림과 같고, $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$ 를 만족할 때, $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?



① 1

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{11}{9}$

⑤ $\frac{25}{16}$

해설

$$f(-x) = -f(x) \text{ 이므로}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$g(-x) = g(x)$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}$$

23. $a < 0, b < 0$ 이고 $x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ 일 때, $\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}$ 를 a, b 로 나타내면?

① $\frac{b}{a}$

② $\frac{a}{b}$

③ $\frac{b}{2a}$

④ $-\frac{2a}{b}$

⑤ $\frac{a}{2b}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} &= \sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{4ab}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} \\ &= \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} (\because a < 0, b < 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2} - x = \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} - \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{1+x^2} + x = \frac{-(a+b)}{2\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-b}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

24. 다음 그림은 2008 년 9 월 달력의 일부분이다.

S	M	T	W	T	F	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

대원이는 9 월 1 일부터 9 월 20 일까지 일주일에 2회씩 모두 6 번을 학교에서 보충학습을 하려고 한다. 보충학습을 하는 6 일의 요일을 모두 다르게 정하는 방법의 수는? (단, 일요일에는 보충학습을 하지 않는다.)

① 30

② 45

③ 60

④ 90

⑤ 120

해설

9 월 셋째 주의 월, 화, 수, 목, 금, 토의 6 일 중에서 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (가지)}$$

둘째 주에는 셋째 주에서 정한 요일을 제외하고 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ (가지)}$$

첫째 주에는 남은 요일로 결정되므로 이틀을 정하는 방법의 수는 1 가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $15 \times 6 \times 1 = 90$ (가지)

25. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

I. $f(0) = g(0) = -1$

II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① I

② I, II

③ I, III

④ II, III

⑤ I, II, III

해설

I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x=0, y=1$

$$y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

따라서 점근선은 $x=0, y=1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.