1. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

2. $g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x)$, $g(x)$ 의 역함수)

① $\dfrac{2x-3}{x+2}$　② $\dfrac{x-2}{2x+3}$　③ $\dfrac{2x+3}{x-2}$

④ $\dfrac{x+2}{2x-3}$　⑤ $\dfrac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\left\{f(x)\right\}$

$\therefore\ g\left\{f(x)\right\} = 2 + \dfrac{7}{f(x)-2} = x$

$\rightarrow\ \dfrac{7}{f(x)-2} = x-2$

$\rightarrow\ 7 = \left\{f(x)-2\right\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$

$\rightarrow\ 2x+3 = f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x$ 에서

$f(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x, y 를 바꾸면

$x = 2 + \dfrac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2) = 7$

$y-2 = \dfrac{7}{x-2}$, $y = \dfrac{7}{x-2} + 2 = \dfrac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

3. $f(5)=10$, $f(10)=30$ 이고 $g(x)=ax-10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1}\circ g=f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=8$

해설

$f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ f$ 에서

$g=f\circ f\cdots$ ㉠

$g(5)=f(f(5))=f(10)=30\cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a-10=30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

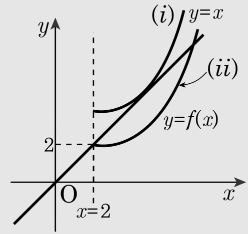
4. 함수 $f(x)=x^2-4x+k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0<k<\frac{25}{4}$　② $k<\frac{25}{4}$　③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$

④ $6<k \leq \frac{25}{4}$　⑤ $6 \leq k<\frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y=x$ 위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$가 접할 때,

$x^2-4x+k=x,\ x^2-5x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4k=0$

$\therefore \mathrm{k}=\frac{25}{4}$

(ii) $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2^2-4 \cdot 2+k=2$ 이므로 $k=6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k<\frac{25}{4}$

5. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 5$, $g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

6. $|y-1| = x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

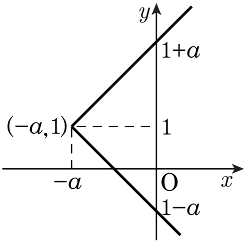
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|y-1| = x+a$ 의 그래프는 $|y| = x$를 x 축 음의 방향으로 a, y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 그래프이므로 다음 그림과 같다.

이때, y 절편은 $|y-1| = a$ 에서 $y = 1 \pm a$

$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 4 \quad \therefore\ a = 2(a > 0)$



7. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

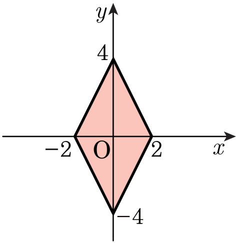
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$,
즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서
$x\geq 0,\ y\geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $8\times 4\times \frac{1}{2}=16$



8. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$

④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

9. $\mathrm{A} = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 A 로의 함수 f 가 있다. $f(-x) = f(x)$ 인 함수 f 의 개수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$3 \times 3 = 9$

10. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$
$+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$의 값은?

① $a+b+c$　② $a^2+b^2+c^2$　③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$　⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$
$=(b-c+c-a+a-b)x$
$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$
$\therefore\ f(x)=0 \quad \therefore\ f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$$f(a)=\frac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{b-c}+\frac{1}{b-c}=0$$
$$f(b)=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-c}=0$$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고
$f(a)=f(b)=0$이므로
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.
$\therefore\ f(2013)=0$

11. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$ ② $A \geq B=C$ ③ $A<B<C$

④ $A \leq B=C$ ⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$

$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$

$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$

$$\therefore\ A=\frac{21}{27},\ B=\frac{21}{24},\ C=\frac{21}{23}$$

$$\therefore A<B<C$$

12. $a+b+c \neq 0$, $abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c가 $\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c}$를 만족할 때, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\frac{b+c-a}{3a} = \frac{c+a-b}{3b} = \frac{a+b-c}{3c} = k$

$b+c-a = 3ak \cdots$ ㉠

$c+a-b = 3bk \cdots$ ㉡

$a+b-c = 3ck \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢ : $a+b+c = 3(a+b+c)k$

$a+b+c \neq 0$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$

$k = \frac{1}{3}$ 를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면

$b+c = 2a,\ c+a = 2b,\ a+b = 2c$

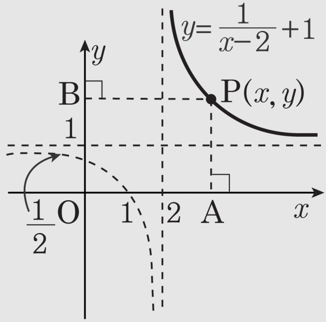
$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{8abc}{abc} = 8$

13. 분수함수 $y = \dfrac{1}{x-2} + 1(x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



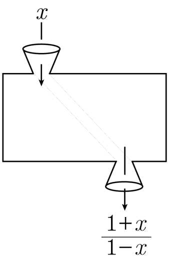
위 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}} = y = \dfrac{1}{x-2} + 1$ $\overline{\mathrm{PB}} = x(x > 2)$

$\therefore \ \overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} = x + \dfrac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \dfrac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

14. 다음 그림과 같이 x를 넣으면 $\dfrac{1+x}{1-x}$가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2, x_2를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1}이라 한다. $x_1=-\dfrac{1}{2}$일 때, x_{2000}을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$x_1=-\dfrac{1}{2}$이면

$$x_2=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

$$x_3=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2,$$

$$x_4=\frac{1+2}{1-2}=-3,$$

$$x_5=\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2},\ x_6=\frac{1}{3},\cdots$$

그러므로 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때

$$x_{4k+1}=-\frac{1}{2},\ x_{4k+2}=\frac{1}{3},\ \ x_{4k+3}=2,\ x_{4k+4}=-3$$

따라서, $2000=4\times499+4$이므로

$$x_{2000}=x_4=-3$$

15. 두 함수 $y=\sqrt{x+1}+2, y=mx$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a<m\le b$ 이다. 이 때 $a+b$ 의 값은?

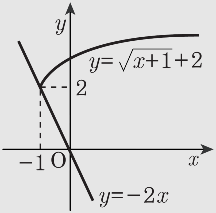
① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면
m 의 값의 범위는 $-2<m\le 0$ 이어야 한다.

$\therefore a=-2, b=0$

$\therefore a+b=-2$



16. 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2-x} & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f)(k) = 2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = 2$ 에서

$f(k) = k'$ 이라 하면 $f(k') = 2$

i) $k' \geq 0$ 이면

$y = 1 - \sqrt{x}$이고, $y \leq 1$ 이므로

함숫값이 2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k' < 0$

ii) $k' < 0$ 이므로

$f(k') = \sqrt{2-k'} = 2$

$2 - k' = 4 \qquad \therefore\ k' = -2$

$f(k) = -2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.

iii) $k < 0$ 이면

$y = \sqrt{2-x}\ (x < 0)$ 이고, $y > \sqrt{2}$ 이므로

함숫값이 -2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k \geq 0$

iv) $k \geq 0$ 이므로

$f(k) = 1 - \sqrt{k} = -2$

$\therefore\ k = 9$

17. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 P $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{7}{5}$

해설

두 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$와의 교점이다.

$\sqrt{x+2} = x$ 에서 $x^2 = x+2$

$\therefore\ x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$에서

$x = -1$ 또는 $x = 2$

$\therefore \mathrm{P}(a,\ b) = \mathrm{P}(2,\ 2)$

$(\because \mathrm{P}(a,\ b)$는 제 1 사분면에 존재한다.)

18. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ ② $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$ ⑤ $\dfrac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$\therefore f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

19. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n\text{이 } 2\text{의 배수일 때}) \\ n+1 & (n\text{이 } 2\text{의 배수가 아닐 때}) \end{cases}$$ 로 정의하자.

$f = f^1,\ f \circ f = f^2,\ f \circ f^2 = f^3,\ \cdots,\ f \circ f^n = f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10) = 2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면

$f(10) = 5$

$f^2(10) = f(f(10)) = f(5) = 6$

$f^3(10) = f(f^2(10)) = f(6) = 3$

$f^4(10) = f(f^3(10)) = f(3) = 4$

$f^5(10) = f(f^4(10)) = f(4) = 2$

따라서, $f^k(10) = 2$ 가 되는 k 의 최솟값은 5이다.

20. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x) = f(x-2)$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9) = k$ 라 하면 $g(k) = 9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2 = 9$ 에서 $k = 5$

$k < 2$ 일 때, $k - 2 = 9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9) = 5$

21. $\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{x+6}{x+5}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{2(2x-1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

② $\dfrac{2(2x+1)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

③ $\dfrac{2(2x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

④ $\dfrac{2(x+5)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

⑤ $\dfrac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right) \\
&\quad -\left(1+\frac{1}{x+4}\right)+\left(1+\frac{1}{x+5}\right) \\
&= \frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5} \\
&= \frac{2x+7}{(x+2)(x+5)}-\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{(2x+7)(x^2+7x+12-x^2-7x-10)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} \\
&= \frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}
\end{aligned}
$$

22. a, b, c가 실수일 때, $a+b=4ab$, $b+c=10bc$, $c+a=6ca$이 성립한다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

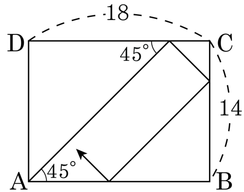
$a+b=4ab$에서 $\frac{a+b}{ab}=4$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

같은 방법으로 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=6$

$\therefore 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=20$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$

23. 가로, 세로가 각각 18, 14 인 직사각형 ABCD 의 한 꼭짓점 A 에서 $45°$ 각도로 빛을 내보냈다. 사각형의 각 변이 모두 거울로 이루어졌다고 생각할 때, 빛의 이동 거리는? (단, 빛은 최초로 도달한 꼭짓점에 도달하면 소멸한다.)

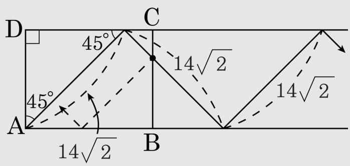


① 126　　② $126\sqrt{2}$　　③ 32

④ $32\sqrt{2}$　　⑤ 무한하다.

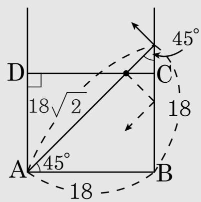
해설

빛이 윗변 DC 와 밑변 AB 를 한 번 횡단할 때에 움직인 거리는 $14\sqrt{2}$



변 DC 와 변 AB 를 n 번 횡단한 후에 꼭짓점에 도달했다고 가정하면 움직인 거리는 $14\sqrt{2}n \cdots$ ㉠

한편, 빛이 좌변 DA 와 우변 BC 를 한 번 횡단할 때에 움직인 거리는 $18\sqrt{2}$



변 DA 와 변 BC 를 m 번 횡단한 후에 꼭짓점에 도달했다고 가정하면 움직인 거리는 $18\sqrt{2}m \cdots$ ㉡

㉠ $=$ ㉡ 에서 $14\sqrt{2}n = 18\sqrt{2}m$

$\therefore\ 7n = 9m$ 이 식을 만족시키는 최소의 자연수 n, m 은 $n = 9$, $m = 7$

이때, 움직인 거리는 $14\sqrt{2} \cdot 9 = 126\sqrt{2}$

24. a가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-1}$$

① $a > 0$

② $a \geq 1$

③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$

⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

좌변 $= a\sqrt{\dfrac{a^2-(1)^2}{(a)^2}} = \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}$ 에서

$\sqrt{a^2-1}\left(\dfrac{a}{|a|}-1\right) = 0$ 이므로

$\sqrt{a^2-1} = 0$ 또는 $\dfrac{a}{|a|} = 1$

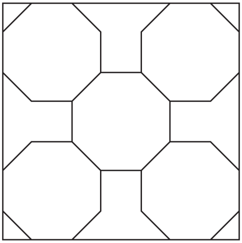
$\therefore a = \pm 1$ 또는 $a > 0 \cdots$ ㉠

한편 근호 안의 값은 양수이므로

$a^2 - 1 \geq 0$ 으로부터 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1 \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서 $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

25. 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 그림과 같이 합동인 5개의 정팔각형이 위치할 때, 한 개의 정팔각형의 넓이는?



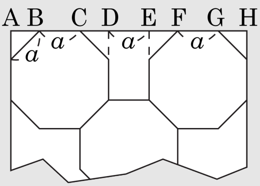
① $2(5\sqrt{2}-7)$　② $4(5\sqrt{2}-7)$

③ $6(5\sqrt{2}-7)$　④ $8(5\sqrt{2}-7)$

⑤ $10(5\sqrt{2}-7)$

해설

정팔각형의 한 변의 길이를 a 라 하면



그림에서 $\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FG}=a$

$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{AH}=3a+4\times\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$=(3+2\sqrt{2})a$

그런데 문제의 조건에서 $\overline{AH}=2$ 이므로

$(3+2\sqrt{2})a=2$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=2(3-2\sqrt{2})$

따라서 한 개의 정팔각형의 넓이는 한 변의 길이가 $\overline{AD}$ 인 정사각형의 넓이에서

네 귀퉁이의 직각이등변삼각형의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$\left(a+2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=(2+2\sqrt{2})a^2$$

$$\therefore (2+2\sqrt{2})a^2=(2+2\sqrt{2})\left\{2(3-2\sqrt{2})\right\}^2$$

$$=8(5\sqrt{2}-7)$$