1. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2 x = x$ 에서
$a^2 = 1 \quad \therefore\ a = \pm 1$

2. 세 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ h))(1)$, $((f \circ g) \circ h))(1)$ 의 값을 각각 a, b 라고 할 때, $2a - b$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 6　　⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} a = (f \circ (g \circ h))(1) &= f((g \circ h)(1)) \\ &= f((g(h(1))) \\ &= f((g(1))) = f(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = ((f \circ g) \circ h))(1) &= (f \circ g)(h(1)) \\ &= f(g(h(1))) = 3 \end{aligned}$$

$\therefore\ 2a - b = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$ 를 만족할 때, $f\left(\frac{1-2x}{3}\right)$ 와 같은 것은?

① $3-2x$ ② $1-4x$ ③ $1-3x$
④ $1-2x$ ⑤ $3-4x$

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면

$x=2t-1$ 이므로 $f(t)=3(2t-1)+2=6t-1$

$$f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=6\left(\frac{1-2x}{3}\right)-1$$
$$=2-4x-1=1-4x$$

4. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\dfrac{-x-1}{x-1}$ ㉡ $y=\dfrac{x}{x-1}$ ㉢ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 α만큼,
y축으로 β만큼 평행이동시키면
$y=\dfrac{1}{x-\alpha}+\beta$ 꼴이 된다.
㉠ $y=\dfrac{-x-1}{x-1}=\dfrac{-(x-1)-2}{x-1}=-\dfrac{2}{x-1}-1$
㉡ $y=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+1$
㉢ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-2$
따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

5. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a - d = 0$　　② $a + d = 0$　　③ $ad = 1$

④ $ad = -1$　　⑤ $ad - bc = 0$

해설

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d}$$

$$= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

주어진 분수함수의 점근선은

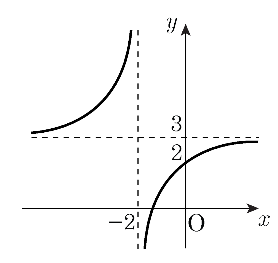
$x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$ 이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c} = -\dfrac{d}{c}$, $a = -d$

$\therefore a + d = 0$

6. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?



① -9 ② -7 ③ -5

④ 7 ⑤ 9

해설

점근선이 $x=-2, y=3$이므로 $y = 3 + \dfrac{k}{x+2}$, $(k \neq 0)$

점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2 = 3 + \dfrac{k}{0+2}$, $\quad k = -2$

따라서 $y = 3 + \dfrac{-2}{x+2} = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$\therefore\ \ a = 3,\ b = 4,\ c = 2$

$\therefore\ \ a+b+c = 9$

7. 분수함수 $y = \dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \leq -3\}$　② $\left\{x \mid x \leq -\dfrac{2}{3}\right\}$　③ $\left\{x \mid x \geq -\dfrac{2}{3}\right\}$

④ $\left\{x \mid x \geq \dfrac{2}{3}\right\}$　⑤ $\{x \mid x \geq 3\}$

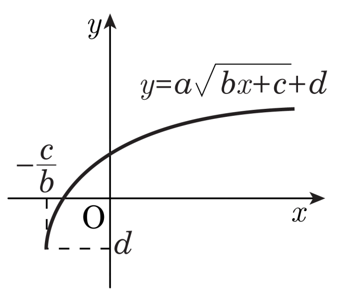
해설

$y = \dfrac{-ab-1}{x+b} + a$ 이므로

점근선은 $x = -b$, $y = a \therefore a = 3, b = 2$

$y = \sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \geq -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

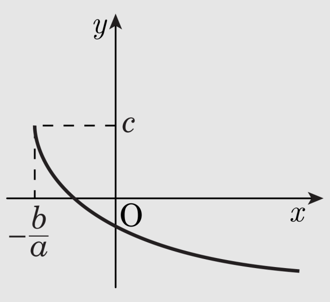
8. 함수 $y = a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?



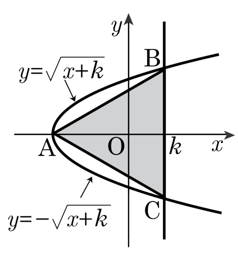
① 제 1사분면 ② 제 2사분면 ③ 제 3사분면
④ 제 2, 4사분면 ⑤ 제 3, 4사분면

해설

$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$



9. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = \sqrt{x+k}$, $y = -\sqrt{x+k}$의 그래프의 교점을 A, 두 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 점B, C라고 할 때, $\triangle$ABC의 넓이가 64이다. 이 때, 실수 k의 값은?



① 6　　② 7　　③ 8

④ 9　　⑤ 10

해설

점 A의 좌표는 $(-k,\ 0)$이고,

$y = \sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$일 때, $y = \sqrt{2k}$

$y = -\sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$일 때, $y = -\sqrt{2k}$

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

B $(k,\ \sqrt{2k})$, C $(k,\ -\sqrt{2k})$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2k} \cdot 2k = 64$, $k\sqrt{2k} = 32$

양변을 제곱하면 $2k^3 = 32^2,\ k^3 = 512$

이 때, k는 실수이므로

$\therefore k = 8$

10. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y | y \geq 0\}$

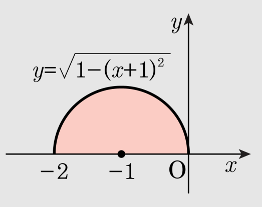
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



11. $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots$ 에 대하여 $f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x)=f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f_1(x)=f_0(f_0(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$

$f_2(x)=f_0(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$

$n=2$ 일 때 $f(x)=x$ 이다.
즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x)=f_{3\times33+1}(x)=f_1(x)=\dfrac{x-1}{x}$

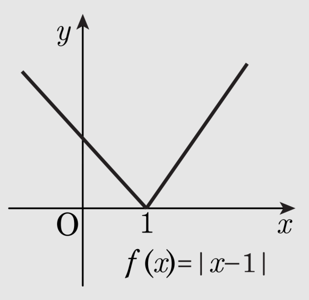
$\therefore\ f_{100}(100)=\dfrac{100-1}{100}=\dfrac{99}{100}$

12. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x의 합을 구하면?

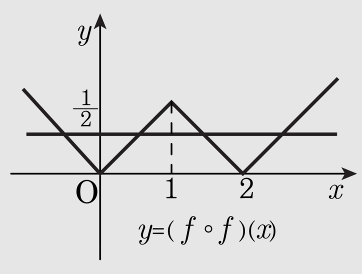
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프와 $y=\frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

13. 함수 $f(x) = 4x - 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $f(3x)$의 역함수를 $g(x)$로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$에서 $f(x)$를 y로 놓고
$y = 4x - 1$을 x에 관하여 정리하면
$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$
이 때, x와 y를 바꾸면
$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
또, $f(3x) = 12x - 1$에서 $f(3x) = y$로 놓고
$y = 12x - 1$을 x에 관하여 정리하면
$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$
$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}g(x)$

14. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases}$ 일 때, $(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 를 만족하는

상수 a 의 값을 구하면?

① -3　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$\therefore\ k_1 = \frac{1}{4}$

$\therefore\ f(f(a)) = \frac{1}{4}$

$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2$ 라 하면 $f(k_2) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < 1$ 이므로 $k_2 \geq 1$, $\frac{1}{k_2 + 1} = \frac{1}{4}$

$\therefore\ k_2 = 3$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$\therefore\ \frac{1}{a} + 1 = 3,\ a = \frac{1}{2}$

15. 세 함수 $f(x) = 2x+1,\ g(x) = x-3,\ h(x) = ax+b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned}((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\ &= g(f(x-3)) \\ &= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\ &= (2x-5)-3 = 2x-8\end{aligned}$$

$2x-8 = ax+b$ 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a+b = -6$

16. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(2) = 5,\ g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

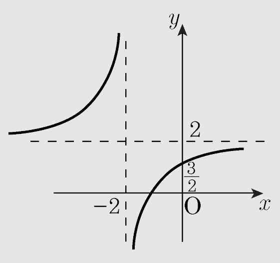
함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

17. 분수함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y>2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3<x<-2\}$　　② $\{x \mid x<-2\}$
③ $\{x \mid -2<x\}$　　④ $\{x \mid -2 \le x < 2\}$
⑤ $\{x \mid -2 \le x < 3\}$

해설

$y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}=2+\dfrac{-1}{x+2}$



정의역은 $\{x \mid x<-2\}$

18. 함수 $f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1}=f_1\circ f_n(n=1,2,3,\cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$f_2(1)=(f_1\circ f_1)(1)=f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$=\dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1}=-\dfrac{4}{3}$

$f_3(1)=(f_1\circ f_2)(1)=f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1}=1$

$f_4(1)=(f_1\circ f_3)(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4=f_1,\ f_5=f_2,\ f_6=f_3,\cdots$

$\therefore f_{3n+1}=f_1,\ f_{3n+2}=f_2,\ f_{3n}=f_3$

$100=3\times 33+1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

19. 분수함수 $f(x) = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 에서

점근선 $x = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{a+5}{b+c}$

$2c = -b,\ 3a = -b,\ c = -3$

$\therefore y = \dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1} = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$g(x) = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0) = \dfrac{5}{2}$

20. 함수 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ 과 이 함수의 역함수와의 교점의 좌표를 P (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

함수 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$ 이고

이것은 $y = x$ 와 대칭관계에 있다.

따라서 두 곡선 $y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$, $x = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$ 의 교점은

$y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ 과 $y = x$ 의교점과같다.

$\sqrt{x - \frac{1}{4}} = x$ 에서 $x - \frac{1}{4} = x^2$

$4x^2 - 4x + 1 = 0, (2x - 1)^2 = 0, \therefore x = \frac{1}{2}$

즉 P $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에서 $a + b = 1$