1. 함수 $f(x) = ax$ 가 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax) = a(ax) = a^2x = x$ 에서

$a^2 = 1 \quad \therefore \ a = \pm 1$

2. 세 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ h))(1)$, $((f \circ g) \circ h))(1)$ 의 값을 각각 a, b 라고 할 때, $2a - b$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$a = (f \circ (g \circ h))(1) = f((g \circ h)(1))$$
$$= f((g(h(1)))$$
$$= f((g(1))) = f(0) = 3$$
$$b = ((f \circ g) \circ h))(1) = (f \circ g)(h(1))$$
$$= f(g(h(1))) = 3$$
$$\therefore\ 2a - b = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$ 를 만족할 때, $f\left(\frac{1-2x}{3}\right)$ 와 같은 것은?

① $3-2x$ ② $1-4x$ ③ $1-3x$

④ $1-2x$ ⑤ $3-4x$

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면

$x=2t-1$ 이므로 $f(t)=3(2t-1)+2=6t-1$

$$f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=6\left(\frac{1-2x}{3}\right)-1$$

$$=2-4x-1=1-4x$$

4. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}$ ㉡ $y=\frac{x}{x-1}$ ㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}$

① ㉡ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 α만큼,

y축으로 β만큼 평행이동시키면

$y=\frac{1}{x-\alpha}+\beta$꼴이 된다.

㉠ $y=\frac{-x-1}{x-1}=\frac{-(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}-1$

㉡ $y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

㉢ $y=\frac{-2x-1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-2$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

5. 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 있다. 이 함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건은?

① $a - d = 0$ ② $a + d = 0$ ③ $ad = 1$

④ $ad = -1$ ⑤ $ad - bc = 0$

해설

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+b) - \frac{ab}{c} + b}{cx+d}$$

$$= \frac{\frac{b}{c}(c-a)}{cx+d} + \frac{a}{c} = \frac{b(c-a)}{c(cx+d)} + \frac{a}{c}$$

주어진 분수함수의 점근선은

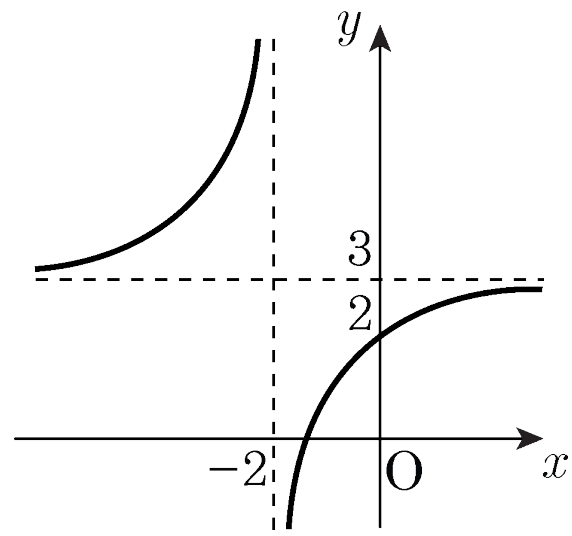
$x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$ 이므로

그래프는 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$ 에 대하여 대칭이다. 이때, 이 분수함수의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$ 은 직선 $y = x$ 위에 있다.

$\therefore \dfrac{a}{c} = -\dfrac{d}{c},\ a = -d$

$\therefore a + d = 0$

6. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?



① -9 ② -7 ③ -5

④ 7 ⑤ 9

해설

점근선이 $x = -2, y = 3$이므로 $y = 3 + \dfrac{k}{x+2}$, $(k \neq 0)$

점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2 = 3 + \dfrac{k}{0+2}$, $\quad k = -2$

따라서 $y = 3 + \dfrac{-2}{x+2} = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$\therefore \quad a = 3,\ b = 4,\ c = 2$

$\therefore \quad a+b+c = 9$

7. 분수함수 $y = \dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \le -3\}$ ② $\left\{x \mid x \le -\dfrac{2}{3}\right\}$ ③ $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$

④ $\left\{x \mid x \ge \dfrac{2}{3}\right\}$ ⑤ $\{x \mid x \ge 3\}$

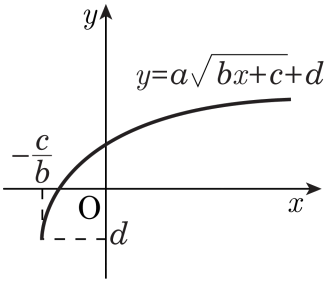
해설

$y = \dfrac{-ab-1}{x+b} + a$ 이므로

점근선은 $x = -b$, $y = a$ $\therefore a = 3, b = 2$

$y = \sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

8. 함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b} + c$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?

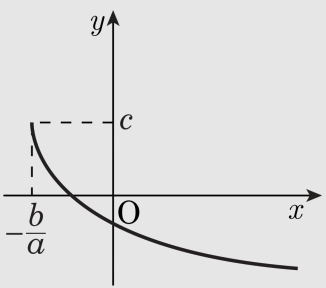


① 제 1사분면 ② 제 2사분면 ③ 제 3사분면

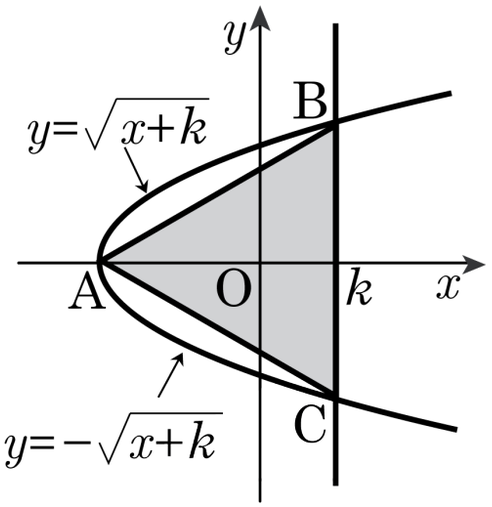
④ 제 2, 4사분면 ⑤ 제 3, 4사분면

해설

$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$



9. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = \sqrt{x+k}$, $y = -\sqrt{x+k}$의 그래프의 교점을 A, 두 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 점B, C라고 할 때, $\triangle ABC$의 넓이가 64이다. 이 때, 실수 k의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

해설

점 A의 좌표는 $(-k,\ 0)$이고,

$y = \sqrt{x+k}$에서 $x = k$일 때, $y = \sqrt{2k}$

$y = -\sqrt{x+k}$에서 $x = k$일 때, $y = -\sqrt{2k}$

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

B $(k,\ \sqrt{2k})$, C $(k,\ -\sqrt{2k})$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2k} \cdot 2k = 64$, $k\sqrt{2k} = 32$

양변을 제곱하면 $2k^3 = 32^2$, $k^3 = 512$

이 때, k는 실수이므로

$\therefore k = 8$

10. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$

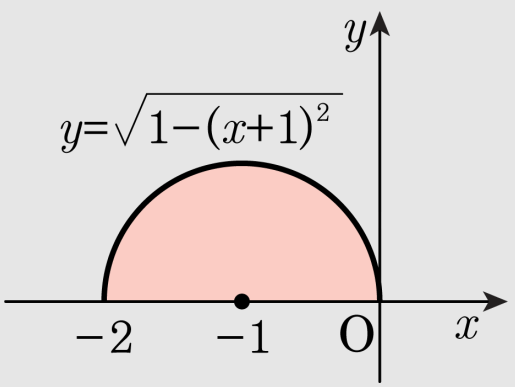
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2+y^2=1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



11. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ 에 대하여 $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x$$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.
즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x) = f_{3\times 33+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$

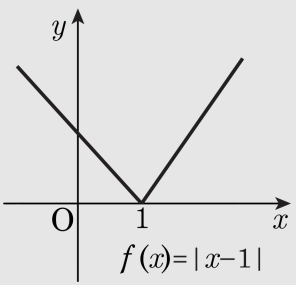
$$\therefore\ f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

12. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 를 만족하는 모든 x의 합을 구하면?

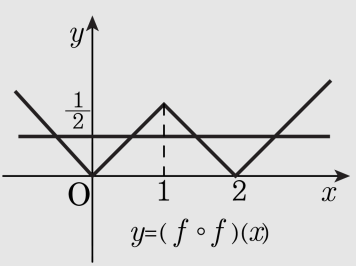
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같으므로



$y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프와

$y=\frac{1}{2}$ 의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

$(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

13. 함수 $f(x)=4x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $f(3x)$의 역함수를 $g(x)$로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$ ② $3g(x)$ ③ $g(3x)$

④ $\frac{1}{3}g(3x)$ ⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x)=4x-1$에서 $f(x)$를 y로 놓고

$y=4x-1$을 x에 관하여 정리하면

$$x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}$$

이 때, x와 y를 바꾸면

$$f^{-1}(x)=g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

또, $f(3x)=12x-1$에서 $f(3x)=y$로 놓고

$y=12x-1$을 x에 관하여 정리하면

$$x=\frac{1}{12}y+\frac{1}{12}$$

$$\therefore f^{-1}(3x)=\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}g(x)$$

14. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & (x\geq 1)\\ \dfrac{1}{x}+1 & (0<x<1)\end{cases}$$

일 때, $(f\circ f\circ f)(a)=5$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f\circ f\circ f)(a)=5$ 에서 $f(f(f(a)))=5$ 이므로
$f(f(a))=f^{-1}(5)=k_1$ 이라 하면 $f(k_1)=5$

$5>1$ 이므로 $0<k_1<1$, $\dfrac{1}{k_1}+1=5$

$\therefore\ k_1=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ f(f(a))=\dfrac{1}{4}$

$f(a)=f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=k_2$ 라 하면 $f(k_2)=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}<1$ 이므로 $k_2\geq 1$, $\dfrac{1}{k_2+1}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ k_2=3$

$f(a)=3$ 에서 $3\geq 1$ 이므로 $0<a<1$

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+1=3,\ a=\dfrac{1}{2}$

15. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned}((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3) \\ &= g(f(x - 3)) \\ &= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5) \\ &= (2x - 5) - 3 = 2x - 8\end{aligned}$$

$2x - 8 = ax + b$ 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a + b = -6$

16. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 5$, $g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

17. 분수함수 $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ 의 치역이 $\{y \mid y > 2\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid -3 < x < -2\}$

② $\{x \mid x < -2\}$

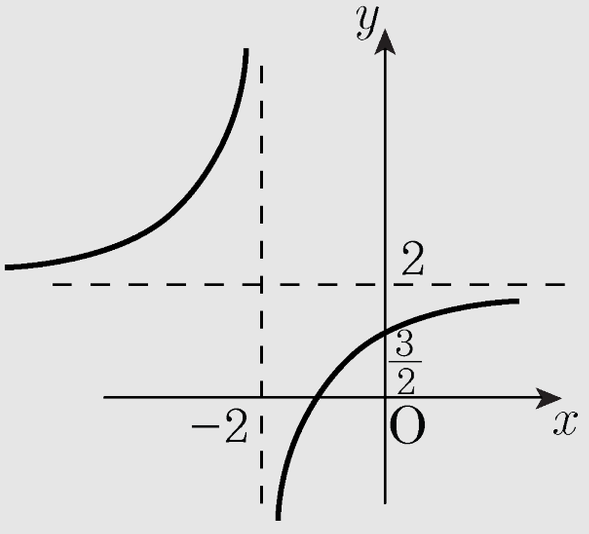
③ $\{x \mid -2 < x\}$

④ $\{x \mid -2 \le x < 2\}$

⑤ $\{x \mid -2 \le x < 3\}$

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 + \frac{-1}{x+2}$$



정의역은 $\{x \mid x < -2\}$

18. 함수 $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$= \dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1} = -\dfrac{4}{3}$

$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1} = 1$

$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4 = f_1,\ f_5 = f_2,\ f_6 = f_3, \cdots$

$\therefore f_{3n+1} = f_1,\ f_{3n+2} = f_2,\ f_{3n} = f_3$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

19. 분수함수 $f(x) = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 에서

점근선 $x = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{a+5}{b+c}$

$2c = -b,\ 3a = -b,\ c = -3$

$\therefore y = \dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1} = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$g(x) = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0) = \dfrac{5}{2}$

20. 함수 $y=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$과 이 함수의 역함수와의 교점의 좌표를 $\mathrm{P}\ (a,b)$라 할 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

함수 $y=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$의 역함수는 $x=\sqrt{y-\frac{1}{4}}$이고

이것은 $y=x$와 대칭관계에 있다.

따라서 두 곡선 $y=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$, $x=\sqrt{y-\frac{1}{4}}$의 교점은

$y=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ 과 $y=x$의교점과같다.

$\sqrt{x-\frac{1}{4}}=x$에서 $x-\frac{1}{4}=x^2$

$4x^2-4x+1=0, (2x-1)^2=0,\ \therefore x=\frac{1}{2}$

즉 $\mathrm{P}\ (a,b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에서 $a+b=1$