

1. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.

합성함수의 정의에 의하여,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$$

$$+ 2mnx + n^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$$

$$+ (3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$$

$$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$\therefore m = 2 (\because m \text{ 은 실수})$$

$$3m^2n + m^2 = -8 \text{ 에 } m = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$$

$$\therefore n = -1$$

$$m = 2, n = -1 \text{ 일 때,}$$

x 의 계수와 상수항도 일치하므로

$$\therefore m = 2, n = -1$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$$

2. 두 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 3$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 4$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(ax - 3) + 6 = 2ax$$

$$(f \circ g)(1) = 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$

3. $f : x \rightarrow x+3$, $g : x \rightarrow 3x+1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $h(x) = x - 4$ ② $h(x) = x - 9$ ③ $h(x) = x - 6$
④ $h(x) = 2x - 3$ ⑤ $h(x) = 2x - 6$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(x+3) = 3(x+3) + 1 \\ = 3x + 10 \text{ 이므로}$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(3x+10) = 3x+1$$

$$3x+10 = t \text{ 라 하면 } 3x = t-10$$

$$\therefore h(t) = (t-10) + 1 = t-9$$

$$\therefore h(x) = x-9$$

4. 다음 중 평행이동에 의하여 그 그래프를 $y = \frac{1}{x}$ 과 겹칠 수 없는 것은?

① $y = \frac{-x}{x+1}$ ② $y = \frac{x}{x-1}$ ③ $y = \frac{2x+1}{2x-1}$
④ $y = \frac{x-1}{x}$ ⑤ $y = \frac{2x-5}{x-3}$

해설

$$\textcircled{1} y = \frac{-(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$\textcircled{2} y = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\textcircled{3} y = \frac{(2x-1)+2}{2x-1} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + 1$$

$$\textcircled{4} y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$$

$$\textcircled{5} y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2$$

따라서 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이 아닌 것은 ④이다.

5. 함수 $y = \frac{2x+4}{x-1}$ 의 그래프가 점 (a, b) 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값은?

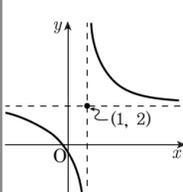
- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+4}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+6}{x-1} \\ &= \frac{6}{x-1} + 2 \text{이므로} \end{aligned}$$

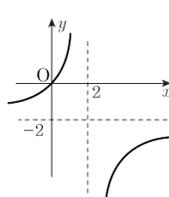
주어진 함수의 그래프는 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$



6. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=-2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -6 ② -4 ③ -3
 ④ 2 ⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=-2$ 이므로 $y = -2 + \frac{k}{x-2}, (k \neq 0)$

점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -2 + \frac{k}{-2}, \quad k = -4$$

$$\text{따라서 } y = -2 + \frac{-4}{x-2} = \frac{-2x}{x-2}$$

$$\therefore a = -2, b = 0, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -4$$

7. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0$, $p = 3$

치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$ 이므로 $q = 4$

$$\therefore f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$$

이때, $f(1) = 6$ 이므로

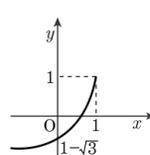
$$\sqrt{-2a} + 4 = 6, \sqrt{-2a} = 2, -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$$

8. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

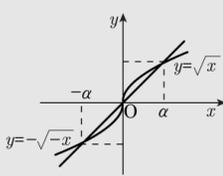
주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한
 것이므로 $y - 1 = -\sqrt{a(x-1)}$
 즉 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$
 그런데 이 그래프가 점 $(0, 1 - \sqrt{3})$ 을 지나므로
 $1 - \sqrt{3} = -\sqrt{-a} + 1,$
 $\therefore a = -3$
 $\therefore y = -\sqrt{-3(x-1)} + 1$
 $\therefore a + b + c = (-3) + 3 + 1 = 1$

9. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합을 구하면?

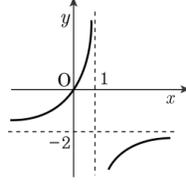
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

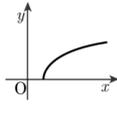
두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.



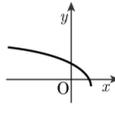
10. 함수 $y = \frac{bx+c}{ax-1}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형은?



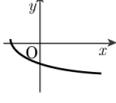
①



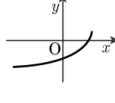
②



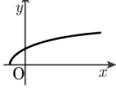
③



④



⑤



해설

점근선이 $x = 1, y = -2$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-1} - 2 \dots \textcircled{1}$$

①이 원점을 지나므로 $(0, 0)$ 을 대입하면,

$$\therefore k = -2$$

$$y = \frac{-2}{x-1} - 2 = \frac{-2x}{x-1}$$

따라서 $a = 1, b = -2, c = 0$

$$\therefore y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{x-2}$$

따라서 개형은 ①이다.

11. 함수 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 에 대하여 $f(x)$ 를 20 번 합성한 함수의 $(f \circ f \circ \dots \circ f)\left(\frac{1}{10}\right)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{200}$ ② $\frac{1}{100}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{20}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}} \\ &= \frac{x}{1+2x} \end{aligned}$$

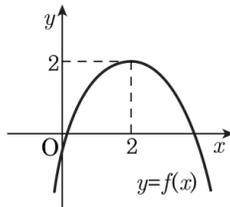
$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= f((f \circ f)(x)) \\ &= \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}} \\ &= \frac{x}{1+3x} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{개}} f(x) = \frac{x}{1+nx}$$

$$\therefore \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{20\text{개}} f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

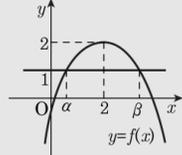
해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

13. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

- ① $\frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2} (x \neq -1)$
 ④ $\frac{x+2}{x+1} (x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1} (x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

14. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

- ① 1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x \text{ 이므로 } (g \circ f)(3x) = x$$

$$3x = t \text{ 로 치환하면 } x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$$

$$3x + 2 = 2 \text{ 일 때 } x = 0$$

$$\therefore g(2) = 0$$

15. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 + x$, $f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$f^{-1}(2) = c \text{ 라 하면 } f(c) = 2 \rightarrow c^2 + c = 2$$

$$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 2) = 0$$

$$c > 0 \text{ 이므로 } c = 1$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

$$f(x)g(x) = x + 2 \text{ 에 } x = 1 \text{ 을 대입하면}$$

$$f(1)g(1) = 3$$

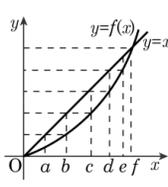
$$(1^2 + 1)g(1) = 3$$

$$\therefore g(1) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(2) = g\{f^{-1}(2)\}$$

$$= g(1) = \frac{3}{2}$$

16. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



- ① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$
 ④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

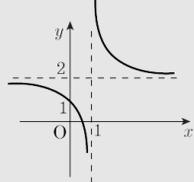
$(f \circ f)(d) = b$, $(g \circ g)(c) = e$
 f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

17. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

- ① $\{x \mid 0 < x < 1\}$ ② $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$
 ③ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ ④ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
 ⑤ $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

해설

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$



$y = 1$ 일 때, $1 = \frac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

18. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

- ① $\frac{1}{f(x)}$ ② $-f(x)$ ③ $\frac{1}{f(-x)}$
④ $-f(-x)$ ⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

19. 함수 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 다음 보기중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
- ㉡ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
- ㉢ $f^{-1}(x) = f(x)$ (단 f^{-1} 는 f 의 역함수)

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠ } f(-x) &= \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)} \\ \text{㉡ } f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1+x}{1-x} \neq f(x) \\ \text{㉢ } f^{-1}(x) &= \frac{x+1}{x-1} = f(x) \end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉢

20. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1} + 1$, $x = \sqrt{y+1} + 1$ 의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

- ① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+1} + 1$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+1} + 1 = x \text{에서}$$

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = 0, 3$$

$$x \geq 1 \text{이므로 } x = 3$$

$$\therefore P(3, 3)$$

$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$