1. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -11　② -9　③ -7　④ 7　⑤ 11

해설

$y = x^2 - 6x + 2$
$= (x-3)^2 - 7$
$x = 3$ 일 때, 최솟값 -7을 갖는다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

3. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore$ $1 < k < 9$

4. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$　② $m < 1, m > 5$　③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$　⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.
$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$
$y = -(x-9)^2 + 81$
따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$　　② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$　　④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
  &   & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
  &   & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
  & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

7. 사차방정식 $x^4-2x^3+2x^2+2x-3=0$ 을 풀면?

① $x=\pm1,\quad x=1\pm\sqrt{2}i$
② $x=\pm2,\quad x=1\pm\sqrt{3}i$
③ $x=\pm1,\quad x=1\pm\sqrt{3}i$
④ $x=\pm2,\quad x=1\pm\sqrt{2}i$
⑤ $x=\pm2,\quad x=3\pm\sqrt{2}i$

해설

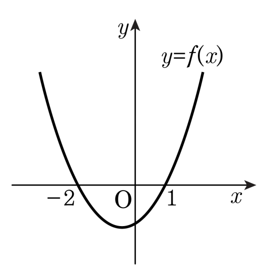
조립제법을 이용한다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x+1)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=\pm1,\quad x=1\pm\sqrt{2}i$

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

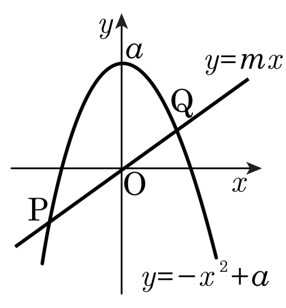
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$

$\therefore a = -3$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

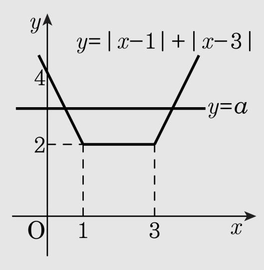
$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

10. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



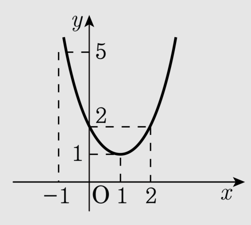
11. x의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x-1)^2 + a - 2$
정의역이 $-1 \leq x \leq 2$ 이므로
최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가된다.
이 때, 최솟값이 1 이므로
$a - 2 = 1 \therefore a = 3$
따라서 주어진 이차함수는 $y = (x-1)^2 + 1$ 이고

그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓값은
$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$y = -x^2 - 2ax + 6a = -(x+a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

13. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$
$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$= -(a + 1)^2 - 4$

m 의 최댓값 : -4

14. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

15. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$
x, y는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0$, $(y-2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

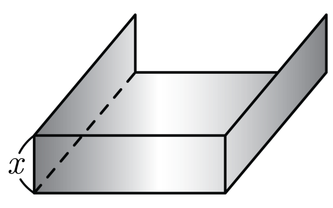
16. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \leq 25$
$\therefore -5 \leq k \leq 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

17. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$y = x(60 - 2x)$

$= -2x^2 + 60x$

$= -2(x^2 - 30x + 225 - 225)$

$= -2(x - 15)^2 + 450$

$x = 15$ 일 때, 최대 넓이 450

18. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad \text{cm}^2}$

▷ 정답 : $100\,\underline{\text{cm}^2}$

해설

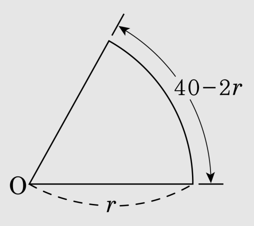
부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.



19. 지면으로부터 30m 높이의 건물 옥상에서 초속 20m 로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x + 30$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ 초

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 2초

▷ 정답 : 50m

해설

$y = -5x^2 + 20x + 30$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 50$ 이다.
따라서 $x = 2$ 일 때, y 는 최댓값 50 을 갖는다.

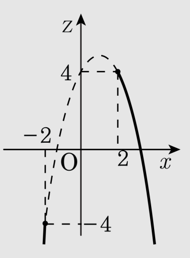
20. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$
$= -(x-1)^2 + 5$
$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면
$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.