1. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 차가 3 이상인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 12가지

해설

차가 3 이상인 경우는 $3, 4, 5$ 이다. 각각의 경우를 구해 보면

(1) $3 : (4,1)(5,2)(6,3)(1,4)(2,5)(3,6)$

(2) $4 : (5,1)(6,2)(1,5)(2,6)$

(3) $5 : (6,1)(1,6)$

$\therefore 6+4+2=12$

2. A, B 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 눈의 합이 4 또는 6 이 되는 경우의 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

눈의 합이 4 인 경우는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지,
눈의 합이 6 인 경우는
$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5 가지
따라서 구하는 경우의 수는 $3 + 5 = 8$ (가지)

3. 1부터 800까지의 자연수 중에서 800과 서로소인 수의 개수를 구하면?

① 310개 ② 320개 ③ 330개
④ 340개 ⑤ 350개

해설

$800 = 2^5 \times 5^2$ 으로 소인수분해가 된다.
800과 서로소가 되려면 2나 5를 인수로 가져서는 아니되므로 1부터 800까지의 수 중에서 2 또는 5의 배수의 개수를 계산하여 여사건을 이용하면 된다.
2의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 400 + 160 - 80 = 480$
따라서 800과 서로 소인수의 개수는
$800 - 480 = 320$(개)이다.

4. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 나열하여 다섯 자리의 정수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 를 만들 때, $a_i = i$ 가 되지 않는 정수의 개수를 구하여라. (단, $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 44 개

해설

$a_1 = 1$ 이 아니므로 a_1 이 2, 3, 4, 5인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4, a_5 를 각각 구해보면
정수의 개수는 44 개이다.

5. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$a_1 < a_2 < a_3$ 이고 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족하는 순서쌍은 $(2,4,6), (2,6,10), (4,6,8), (4,8,12), (6,8,10)$ $(8,10,12)$ 의 6 가지

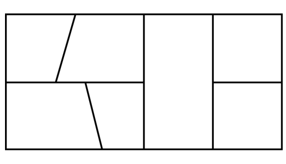
6. 1 부터 999 까지의 자연수 중에서 각 자리에 7 인 숫자가 2 개 이상인 경우의 수는?

① 26 개 ② 27 개 ③ 28 개 ④ 29 개 ⑤ 30 개

해설

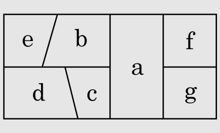
① 7 이 2 개 있는 수 : 77 이 1 개,
77□ 꼴이 9 개,
7□7 꼴이 9 개,
□77 꼴이 8 개
② 7 이 3 개 있는 수, 777 로 1 개
따라서 구하는 경우의 수는
$1 + 9 + 9 + 8 + 1 = 28$ (개)

7. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



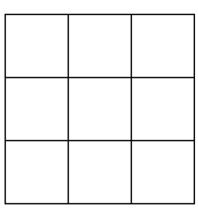
① 4020　② 5160　③ 6480　④ 7260　⑤ 8400

해설



a 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
b 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
c 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
d 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
e 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
a, b, c, d, e 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
f 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
g 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
f, g 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

8. 서로 다른 9 가지의 색으로 오른쪽 정사각형 모양의 모눈 칠판을 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 이 모눈 칠판은 회전해서 같은 모양이면 한 가지 경우로 생각한다.)



① $8!$　　② $9! \times \frac{1}{2}$　　③ $9! \times \frac{1}{3}$

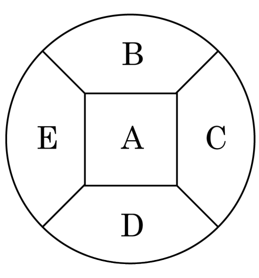
④ $9! \times \frac{1}{4}$　　⑤ $9!$

해설

먼저 한 가운데에 있는 정사각형을 칠하는 색을 정한 다음, 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법을 생각한다. ‘가’ 에 칠하는 색을 고르는 방법은 9 가지가 있다. 나머지 8 개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 $\frac{8!}{4}$ 이므로

구하는 경우의 수는 $9 \times \frac{8!}{4} = \frac{9 \times 8!}{4} = 9! \times \frac{1}{4}$

9. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160　② 270　③ 360　④ 420　⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B 를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지, C 를 칠할 수 있는 방법은 3 가지이다.

(i) B 와 D 가 다른 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 A, B, C 에 칠한 색을 제외한 2 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 A, B, D 에 칠한 색을 제외한 2 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ (가지)

(ii) B 와 D 가 같은 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 B 와 동일하므로 1 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 $A, B(= D)$ 에 칠한 색을 제외한 3 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$ (가지)

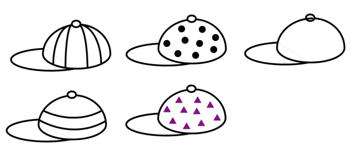
따라서 (i) (ii) 에서 $240 + 180 = 420$ (가지)

10. 한 쪽에는 추만 놓고 다른 쪽에는 물건을 놓아 무게를 재는 양팔저울과 1 g 의 추 2 개, 3 g 의 추 2 개, 9 g 의 추 1 개, 27 g 의 추 2 개 등 모두 7 개의 추가 있다. 이것으로 잴 수 있는 무게는 모두 몇 가지인가? (단, 무게가 0 인 경우도 포함한다.)

① 8 가지 ② 16 가지 ③ 24 가지
④ 36 가지 ⑤ 54 가지

해설
가벼운 추를 모두 올려놓아도 무거운 추 하나보다 가볍기 때문에 계산은 간단해진다.
1 g 의 추를 올려놓는 경우의 수는
0, 1, 2 개의 3 가지,
3 g 의 추를 올려놓는 경우의 수는
0, 1, 2 개의 3 가지,
9 g 의 추를 올려놓는 경우의 수는
0, 1 개의 2 가지,
27 g 의 추를 올려놓는 경우의 수는
0, 1, 2 개의 3 가지
따라서 $3 \times 3 \times 2 \times 3 = 54$ 가지

11. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33 ② 36 ③ 40 ④ 45 ⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_{n=}(n-1)(F_{n-1+}F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

12. 다항식 $(a+b+c)(p+q+r)-(a+b)(s+t)$ 를 전개하였을 때 항의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식의 항의 개수는
$3\times3=9$
$(a+b)(s+t)$ 의 전개식의 항의 개수는
$2\times2=4$
따라서 구하는 항의 개수는 $9+4=13$ 이다.

13. 연도인 2002 는 앞, 뒤 어느 쪽부터 읽어도 서로 같은 좌우대칭인 수이다. 2003 년부터 9999 년까지의 연도 중 2002 와 같이 좌우대칭인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 79 개

해설
좌우대칭인 네 자리 수는 앞의 두 자리 수만 정해지면 된다.
그런데, 2003 이상이 되려면 앞의 두 자리 수는 21 이상 99 이하의 수이어야 한다.
따라서 좌우대칭인 수의 개수는 $99 - 20 = 79$(개) 이다.

14. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 $1, 2, 3$ 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.

이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다.
㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다.
㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18 개이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는
$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ 즉, 3 개 (참)
㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$(참)
㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

15. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

> 규칙1: 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다.
> 규칙2: 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 a상태로내려간다.

<단계1>에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계2>가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계3>이 되면, 이 때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다. 이와 같이 순서대로 에너지가 증감을 반복할 때, <단계1>부터 <단계7>까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

단계 1 : 1가지,
단계 2 : 2가지,
단계 3 : 3가지,
단계 4 : 5가지 $\cdots$
즉, 피보나치 수열을 이룬다.
따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots\cdots$
$\therefore$ 단계 7 : 21

16. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 숫자를 a_i 라고 하자. 이러한 배열 중 $a_i \neq i$ 를 만족하는 것의 개수를 구하시오. (단, $1 \leq i \leq 5$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 44 개

해설

a_1 의 가능한 경우는 $2, 3, 4, 5$ 의 4 가지이다.
$a_1 = 2$ 인 경우 다음 수형도로부터 11 개이다.

a_1	2										
a_2	1		3			4			5		
a_3	4	5	1	4	5	1	5		4		1
a_4	5	3	5	5	1	5	1	3	1	1	3
a_5	3	4	4	1	4	3	3	1	3	3	4

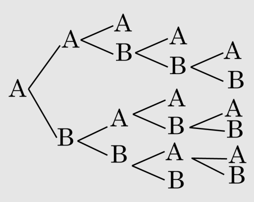
$a_1 = 3, 4, 5$ 인 경우도 마찬가지로 각각 11 개가 있으므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 11 = 44$ (개) 임을 알 수 있다.

17. A, B 두 사람이 테니스 경기를 하는데, 경기는 5세트 중 3세트 이기는 쪽이 승리한다. A가 먼저 1승을 거둔 상태에서 승부가 결정될 때까지 일어날 수 있는 모든 경우의 수는?

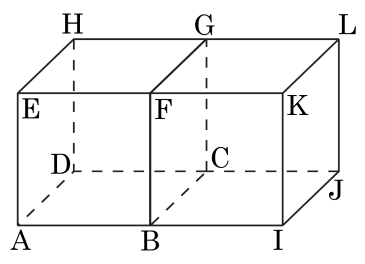
▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 10가지

해설

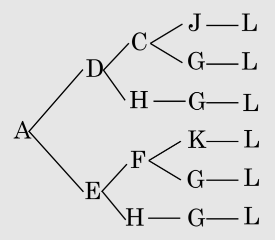


18. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



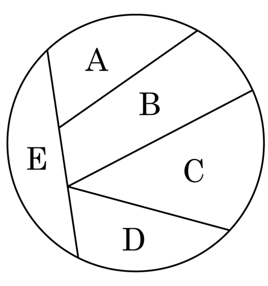
① 4　　② 6　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

19. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?

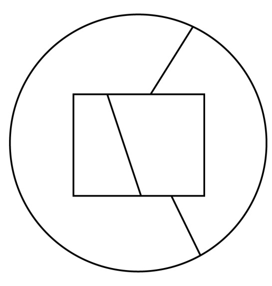


① 160　② 270　③ 360　④ 420　⑤ 540

해설

주어진 그림에서 E 에 칠할 수 있는 색은 5 가지,
A 에 칠할 수 있는 색은 E 에 칠한 색을 제외한
4 가지, B 에 칠할 수 있는 색은 E, A 에
칠한 색을 제외한 3 가지이다.
C 와 D 역시 E, A 에 칠한 색을 제외한 3 가지 색으로 칠할 수 있으므로
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)

20. 다음그림과 같은 도형에 A, B, C, D 네 가지 색깔을 칠하려고 한다. 같은 색은 두 번 이상 칠해도 되지만 서로 이웃한 면에는 다른 색을 칠해야 한다고 할 때, 가능한 방법의 수는?

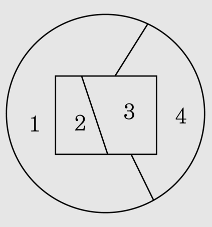


① 36 ② 48 ③ 60 ④ 72 ⑤ 84

해설

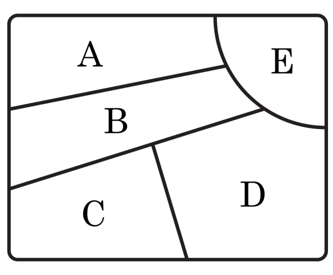
다음그림과 같이 나누어진 영역을 1, 2, 3, 4 라고 하면 각 영역에 칠할 수 있는 색의 경우의 수는

1	2	3	4
↓	↓	↓	↓
4가지	3가지	2가지	2가지



$\therefore 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

21. 다음 그림과 같은 사각형 안에 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 다섯 가지 색을 이웃하는 면에만 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠할 수 있는 모든 경우의 수는?



① 120가지 ② 240가지 ③ 360가지
④ 480가지 ⑤ 540가지

해설

서로 같은 색을 칠할 수 있는 순서쌍은 A – C, A – D, C – E가 있다.
5가지 색을 사용하는 경우 : $5\times4\times3\times2\times1=120$ (가지)
4가지 색을 사용하는 경우 : $3\times(5\times4\times3\times2)=360$ (가지)
3가지 색을 사용하는 경우 : $5\times4\times3=60$ (가지)
$\therefore\ 120+360+60=540$ (가지)