1. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

2. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

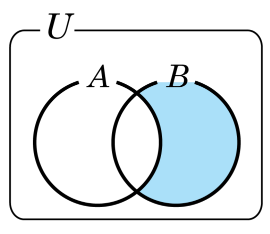
$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

3. $n(U) = 15, n(A - B) = 5, n(A) = 8, n(B^c) = 8$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$n(A) = 8, n(A - B) = 5$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 이다.
$n(B^c) = 8$ 이므로 $n(B) = n(U) - n(B^c) = 15 - 8 = 7$ 이다.
따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 7 - 3 = 4$ 이다.

4. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계
$2<\sqrt{8}<3$이므로
$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서
소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$
(2) 단계
$x+2=\sqrt{8}$
(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,
$x^2+4x=4$를 대입하면
(준식)$=\sqrt{4}=2$

5. 1, 2, 3 으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수는 27개가 있다. 이 중에서 다음 규칙을 만족시키는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.
㈎ 1 바로 다음에는 3 이다.
㈏ 2 바로 다음에는 1 또는 3 이다.
㈐ 3 바로 다음에는 1 , 2 또는 3 이다.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 13가지

해설

조건에 맞는 세 자리수는 131, 132, 133, 213, 231, 232, 233, 313, 321, 323, 331, 332 ,333이므로 13가지이다.

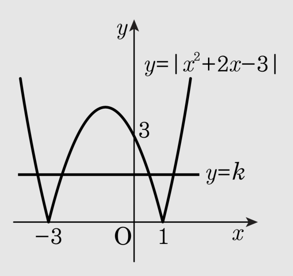
6. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　　② $k > 4$　　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은 두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0<k<3$



7. $3 < 11 - 4x \le 15$일 때, x가 될 수 있는 정수를 모두 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 1

해설

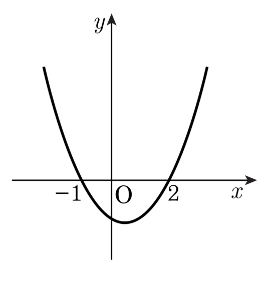
$3 < 11 - 4x \le 15$에서

$-8 < -4x \le 4$,

$2 > x \ge -1$

따라서 만족하는 x는 $x = -1,\ 0,\ 1$

8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, x 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해는?



① $-1 < x < \frac{1}{2}$

② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$

④ x는 모든 실수

⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
x 축과의 교점의 x 좌표가 $-1,\ 2$ 이므로
$a > 0$ 이고
$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$
$\therefore\ b = -a,\ c = -2a\ (a > 0)$

이때, $cx^2 + bx + a > 0 \Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

9. 점 (3, 4) 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

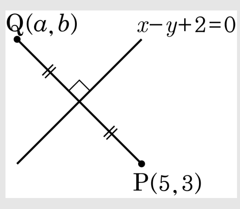
따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

10. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$\dfrac{a+5}{2}-\dfrac{b+3}{2}+2=0$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$ ㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$\times 1=-1$ 이므로

($\because$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$\dfrac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

11. $a+b+c \neq 0$일 때, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

해설

$a+b+c \neq 0$이므로 가비의 리를 적용하면

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$
$$=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

12. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$이 성립할 때, $|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① 0　　② $2a-4$　　③ $4b$

④ -4　　⑤ $-2a+2b$

해설

$\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{b+2}} = -\sqrt{\frac{a-2}{b+2}}$ 가 성립한다면

$a-2 \geq 0,\ b+2 < 0 \Rightarrow a \geq 2,\ b < -2$

$|a-2|-|b-2|+\sqrt{(b-a)^2}$

$= a-2+(b-2)+|b-a| = a-2+b-2+a-b = 2a-4$

13. 100 원짜리 동전 3 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 3 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 98 ② 102 ③ 110 ④ 115 ⑤ 120

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로
각 동전을 사용하는 경우의 수는 $3+1$ 가지이다.
그러나 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,
$\therefore$(지불 방법의 수)$=(3+1)(3+1)(3+1)-1=63$
지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로
100 원짜리 동전 3 개를 50 원짜리 동전 6 개로 바꿔 생각한다.
즉, 50 원짜리 동전 9 개와 10 원짜리 동전 3 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.
$\therefore$(지불 금액의 수)$=(9+1)(3+1)-1=39$
$\therefore\ a+b=102$

14. 서로 다른 9 개의 사탕이 있을 때, 사탕을 3 개씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수를 구하여라

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 280 가지

해설

$$ {}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} = 280 $$

15. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot5-8=12$

16. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다. ㉡ $\alpha=\overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$이다. ㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다. ㉣ $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha=\overline{\beta}$이므로 $\beta=a-bi$
$\therefore\ \alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$\therefore\ \alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta=a^2+b^2=0$, a, b는
실수이므로 $a=0$, $b=0$ 즉, $=a+bi=0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha=i$, $\beta=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=i^2+1^2=0$
㉣ :(반례) $\alpha=1$, $\beta=i$
$\therefore\ \alpha+\beta i=0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

17. 이차함수 $y = ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2 - 9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$\therefore a = -1$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$b = 2$, $c = 8$ 이다.

$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$

18. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9　　② -9　　③ $2a$

④ $2a-3$　　⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

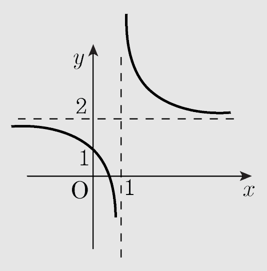
$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

19. 분수함수 $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
④ $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

해설

$y = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$



$y = 1$ 일 때, $1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

20. 가로로 6 개의 평행선과 세로로 4 개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이때, 만들 수 있는 평행사변형은 모두 몇 개인가?

① 60 개 ② 90 개 ③ 120 개
④ 150 개 ⑤ 180 개

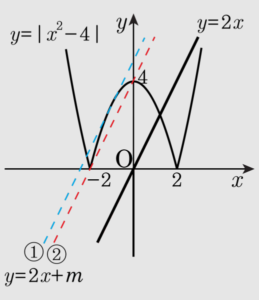
해설
가로와 세로에서 각각 2 개씩을 선택하면 하나의 평행사변형이 만들어진다.
가로 줄에서 2 개를 선택하는 경우의 수는
${}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$,
세로 줄에서 2 개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$
따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $15 \times 6 = 90$(개)

21. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

① $-4<m<4$
② $m=-4$
③ $m=4$ 또는 $m=5$
④ $4<m<5$
⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우
$-x^2+4=2x+m$
$x^2+2x+m-4=0$
$\frac{D}{4}=1-m+4=0$
$\therefore\ m=5$

② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우
$0=-4+m$
$\therefore\ m=4$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로
$\therefore\ 4<m<5$

22. 집합 A, B가 유한집합 U의 부분집합이고, $n(U) = 60$, $n(A) = 42$, $n(B) = 18$일 때, $n(A \cup B)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면, $M - m$의 값은 얼마인가?

① 9　　② 18　　③ 27　　④ 36　　⑤ 38

해설

(i) $n(A \cup B) \le n(U) = 60$

(ii) $n(A \cap B) \le n(A)$, $n(A \cap B) \le n(B)$ $\therefore$ $n(A \cap B) \le 18$

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$18 \ge 42 + 18 - n(A \cup B)$

$\therefore$ $n(A \cup B) \ge 42$

$\Rightarrow$ $42 \le n(A \cup B) \le 60$

$\therefore$ $m = 42$, $M = 60$

$M - n = 18$

23. 다음 보기 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

㉠ $p : xy+1 > x+y > 2$ $q : x > 1,\ y > 1$
㉡ $p : x^2 > y^2$ $q : |x| > |y|$
㉢ $p : |x|+|y| = 0$ $q : x^2+y^2 = 0$
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
㉣ $p : (A \cup B) \cap (B-A)^C = A \cup B$, $q : B \subset A$
㉤ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B$, $q : A - B = \phi$
㉥ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B$, $q : A^C = \mathrm{U}$

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉥이 필요충분조건이다.
㉠ : $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1$ 또는 $x < 1, y < 1$
그런데 $x+y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.
㉤ $(A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$

24. 실수 $x,\ y,\ z,\ t$가 $x+y+z+t=6,\ x^2+y^2+z^2+t^2=12$를 만족할 때, $xy+yz+zx$의 최대값과 최소값의 차는?

① 3　② 9　③ 12
④ $10+24\sqrt{3}$　⑤ $21+12\sqrt{3}$

해설

$x+y+z+t=6$에서 $x+y+z=6-t$
$x^2+y^2+z^2+t^2=12$에서
$x^2+y^2+z^2=12-t^2$
$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$이므로
코시-슈바르츠 부등식 $3(12-t^2) \geq (6-t)^2$에서
$0 \leq t \leq 3 \cdots\cdots$ ㉠
$xy+yz+zx$
$=\frac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right\}$
$=\frac{1}{2}\left\{(6-t)^2-(12-t^2)\right\}$
$=t^2-6t+12=(t-3)^2+3$
㉠에서 $xy+yz+zx$는
$t=0$일 때 최대값 12,
$t=3$일 때 최소값 3을 갖는다.
따라서, 최대값과 최소값의 차는 $12-3=9$

25. $\{(x,\ y) \mid y = \sqrt{x-3}\} \cap \{(x,\ y) \mid y = mx+1\} \neq \varnothing$ 인 m의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{9}$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ ········· ①은

$y = \sqrt{x}$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y = mx+1$ ········· ②의 y절편은 항상 1이다.

②식이 $(3,\ 0)$을 지날 때, $m = -\frac{1}{3} \cdots$ ㉠

②식이 ① 식에 접할 때,

$\sqrt{x-3} = mx+1$에서 양변 제곱하여 정리하면

$m^2x^2 + (2m-1)x + 4 = 0$

$D = 0$에서 $m = \frac{1}{6},\ -\frac{1}{2}$

$m > 0$이므로 $m = \frac{1}{6} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡으로부터

$-\frac{1}{3} \le m \le \frac{1}{6} \quad \therefore\ a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b = -\frac{1}{6}$