1. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

2. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　② $2^{32}+1$　③ $2^{31}-1$
④ $2^{31}+1$　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

3. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

4. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여
$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \left\{(x-\alpha)(x-\beta)\right\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2 \\ &= \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}^2 \\ &= x^4-2(\alpha+\beta)x^3 \\ &+ \left\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\right\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2 \\ &= x^4+2x^3-3x^2-g(x)\end{aligned}$$

$g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면
$-2(\alpha+\beta)=2,\ (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=-3$
$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-2$

5. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

6. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여
정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

7. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

ⅰ) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$
ⅱ) 항등식에 $x = 1, x = -1$을 대입하여 식을 만든다.
$x = 1$을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots$ ①
$x = -1$을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots$ ②
① + ②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$
$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$
$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

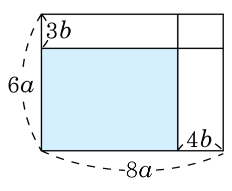
8. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$ ② $R'+RB$ ③ RR'
④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
$A=BQ+R$ ⋯⋯ ㉠
$Q=B'Q'+R'$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$A=B(B'Q'+R')+R$
$=(BB')Q'+(R+R'B)$
$R+R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R+R'B<BB'$이어야 한다.
그런데 $R\le B-1$, $R'\le B'-1$이므로
$R+R'B\le(B-1)+(B'-1)B$
$\quad=BB'-1<BB'$
따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R+R'B$이다.

9. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

10. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

11. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}　② 2^{12}　③ 2^{13}　④ 3^{11}　⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

12. $P(x)=x^2+x+1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-4$　② $4x-1$　③ 5

④ 4　⑤ 3

해설

$P(x^6)=x^{12}+x^6+1$
$x^2+x+1=0$ 의 해를 w 라 하자.
$w^2+w+1=0$, 양변에 $(w-1)$ 을 곱하면
$w^3-1=0,\ w^3=1$
$x^{12}+x^6+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$ 에
w 를 대입하면,
$(w^3)^4+(w^3)^2+1=(w^2+w+1)Q(w)+aw+b$
$3=aw+b$
w 는 허수, $a,\ b$ 는 실수 이므로, $a=0, b=3$
$\therefore$ 나머지$=3$

13. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$(단, $k=0,1,\ 2,\ \cdots,\ 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$P(k)=\frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k)-k=0$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$\therefore\ a=-\frac{1}{11!}$

$f(11)=12P(11)-11$

$=-\frac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$

$\therefore\ P(11)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

14. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$
④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$
$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$
$\quad=(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$
$\quad=(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$
즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$
구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면
$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$
$\quad=(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$
$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$
$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$
$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

15. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$
② $-af(a)+bf(b)$
③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$
④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$
⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\left\{f(a)+f(b)\right\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\left\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\right\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\left\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\right\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$