

1. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 12\text{이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수는?

$A \cap X = A, \quad n(X) = 8$

- ① 15개

② 30개

③ 256개

④ 512개

⑤ 1024개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $A \subset X$, $n(X) = 8$ 이기 위해서 U 에서 A 의 원소 6개를 제외한 5, 7, 8, 9, 10, 11에서 2개를 선택하면 된다.
즉, (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (5, 11), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (7, 11), (8, 9), (8, 10), (8, 11), (9, 10), (9, 11), (10, 11) 따라서 15개이다.

2. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때,
 $A^c \cup B = U$ 을 만족하는 집합 B 의 개수는?

- ① 4개 ② 8개 ③ 16개 ④ 32개 ⑤ 64개

해설

$A^c \cup B = U \iff A \subset B$

B 는 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 를 포함하는 U 의 부분집합이므로
 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^5 = 32$ (개)

3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_A 라 하고, 집합 $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합을 P_B 라 하자. $n(P_A - P_B)$ 의 값은?

① 31 ② 32 ③ 47 ④ 48 ⑤ 56

해설

$$n(P_A - P_B) = n(P_A) - n(P_A \cap P_B) = n(P_A) - n(P_{(A \cap B)}) = n(P_A) - \{3, 4, 5, 6\} \text{의 부분집합의 개수} = 2^6 - 2^4 = 48$$

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$ 와 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$, $(A - B) \cup X = X$ 에서 $A - B \subset X$
따라서 $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
그러므로 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

5. 연도인 2002 는 앞, 뒤 어느 쪽부터 읽어도 서로 같은 좌우대칭인 수이다. 2003 년부터 9999 년까지의 연도 중 2002 와 같이 좌우대칭인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 79 개

해설

좌우대칭인 네 자리 수는 앞의 두 자리 수만 정해지면 된다.
그런데, 2003 이상이 되려면 앞의 두 자리 수는 21 이상 99 이하의 수이어야 한다.
따라서 좌우대칭인 수의 개수는 $99 - 20 = 79$ (개) 이다.

6. 다음 그림과 같이 모양이 서로 다른 세 개의 주머니에 1, 2, 3 이 적힌 세 개의 구슬이 들어 있다.



이 세 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우의 수는 3 개이다.
- ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 6 개이다.
- ㉢ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는 18 개이다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 같은 경우는
(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3) 즉, 3 개 (참)
- ㉡ 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 모두 다른 경우의 수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (참)
- ㉢ 세 개의 주머니에서 각각 한 개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ 이므로 세 개의 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 개가 같은 경우의 수는, $27 - 3 - 6 = 18$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

7. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$a_1 < a_2 < a_3$ 이고 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족하는 순서쌍은 $(2, 4, 6), (2, 6, 10), (4, 6, 8), (4, 8, 12), (6, 8, 10), (8, 10, 12)$ 의 6 가지

8. 연립방정식 $\begin{cases} y = ax - b \\ y = 2ax + b \end{cases}$ 에서 $ab = 8$ 이다.

이 때, 연립방정식의 해 x, y 의 값이 정수가 되는 경우의 수를 구하면?
(단, a, b 의 값은 모두 자연수이다.)

- ① 1 가지 ② 2 가지 ③ 3 가지
④ 4 가지 ⑤ 5 가지

해설

$$\begin{cases} y = ax - b \cdots \textcircled{A} \\ y = 2ax + b \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} \text{에서 } x = -\frac{2b}{a} \cdots \textcircled{C}$$

그런데 $ab = 8$ 을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ 의 4 가지이므로 이를 $\textcircled{C}$ 에 대입하여 x 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$(1, 8) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 8}{1} = -16$$

$$(2, 4) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 4}{2} = -4$$

$$(4, 2) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 2}{4} = -1$$

$$(8, 1) \text{ 일 때, } x = -\frac{2 \times 1}{8} = -\frac{1}{4}$$

따라서 x, y 의 값이 정수가 되는 경우는 모두 3 가지이다.

9. ‘korea’의 모든 문자를 써서 만든 순열 중 적어도 한 쪽 끝이 자음인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 84 개

해설

전체 경우의 수에서 양 쪽 끝이 모두 모음인 경우를 제외한다.

$$5! - {}_3P_2 \times 3! = 84$$

10. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36 ② 72 ③ 144 ④ 288 ⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$$

11. 두 집합 $A = \{4, 7, a+1, 2a-2\}$, $B = \{3, a+2, b, 9\}$ 에 대하여 $A-B = \{4, 6\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A-B = \{4, 6\}$ 이므로
 $4 \in A$, $6 \in A$ 이고 $4 \notin B$, $6 \notin B$, $7 \in B$
 $a+1=6$ 또는 $2a-2=6$
(i) $a+1=6$ 일 때, $a=5$
 $A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, b, 9\}$
 $A-B = \{4, 6\}$ 이려면 $b=8$
(ii) $2a-2=6$ 일 때, $a=4$
 $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 6, b, 9\}$
 $6 \notin B$ 이어야 하므로 $a \neq 4$
 $\therefore A = \{4, 6, 7, 8\}$, $B = \{3, 7, 8, 9\}$
 $A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

12. 두 집합 $A = \{0, a+1, b\}$, $B = \{2b, a-b, 3\}$ 에 대하여 $A - B = \{0, 1\}$, $A \cap B = \{3\}$ 일 때 $a-b$ 는?

① -5

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

$A = \{0, a+1, b\}$, $B = \{2b, a-b, 3\}$ 에 대하여 $A-B = \{0, 1\}$, $A \cap B = \{3\}$ 이므로 A 에는 있고 B 에는 없는 원소는 0 과 1 이며 두 집합에 모두 있는 원소는 3 이다.

따라서 $a+1 = 3$ 또는 $b = 3$ 임을 알 수 있다.

1) $a+1 = 3$ 일 때, $A = \{0, 1, 3\}$ 이 되고 $a = 2$, $b = 1$ 이므로 $B = \{2, 1, 3\}$ 이 되어 $A \cap B = \{3\}$ 에 부적합.

2) $b = 3$ 일 때, $A = \{0, 1, 3\}$ 이 되고 $a = 0$, $b = 3$ 이므로 $B = \{-3, 3, 6\}$ 조건에 합치.

$\therefore a-b = -3$

13. 집합 $A = \{2, 3 \times a, a + 3\}$, $B = \{a, 2 \times a + 1, 3 \times a - 2\}$ 이고 $A - B = \{6\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A - C) \cup (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 4\}$

② $\{2, 5\}$

③ $\{2, 6\}$

④ $\{2, 5, 6\}$

⑤ $\{2, 6, 7\}$

해설

$A - B = \{6\}$ 이므로

(1) $3 \times a = 6$ 일 때, $a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

(2) $a + 3 = 6$ 일 때, $a = 3$ 이다.

따라서 $A = \{2, 6, 9\}$, $B = \{3, 7\}$ 이므로 $A - B = \{2, 6, 9\} \neq \{6\}$

이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1), (2)에서 $(A - C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 6\}$ 이다.

14. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$