1. $X = \{x | x$는 10이하의 자연수$\}$, $Y = \{y | y$는 정수$\}$일 때, 함수 $f : X \to Y$가 $f(x) = (x$의 양의 약수의 갯수$)$로 정의할 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$f(1) = 1, f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2,$
$f(4) = f(9) = 3$
$f(6) = f(8) = f(10) = 4$
$\therefore f(X) = \{1, 2, 3, 4\}$

2. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

$a \rightarrow \boxed{}$, $b \rightarrow \boxed{}$, $c \rightarrow \boxed{}$

Y의 원소 p, q, r, s에서 세 개를 뽑아 위 $\boxed{}$안에
늘어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.
이 때 세 개의 수는 모두 같거나,
두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.
따라서 a에는 p, q, r, s의 4가지,
b에는 a에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,
마찬가지로 c에는 a, b에 온 수가
와도 좋으므로 4가지씩이 있다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(개)

3. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$
이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$
$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$
그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로
$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$
$\therefore\ \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로
$\therefore\ a = -1$

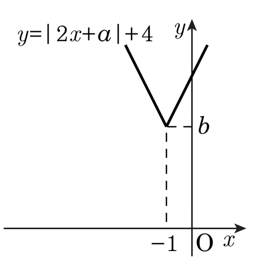
4. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4　② 3　③ 2　④ −1　⑤ −2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$
$(f \circ f)(x) = x$에서
$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$
$\therefore\ k^2 = 1,\ k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

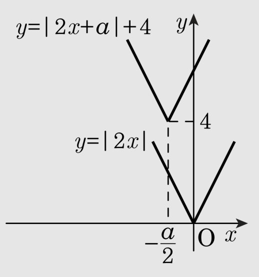
5. 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설



$y=|2x+a|+4$

$=\left|2\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|+4$

즉, 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프는 함수 $y=|2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$-\frac{a}{2}=-1,\ b=4$

$\therefore\ a=2,\ b=4 \qquad \therefore\ ab=8$

6. $\dfrac{x-3}{x^2+x-6} \times \dfrac{x+3}{x^2-x-6}$을 간단히 계산한 것은?

① $\dfrac{1}{x^2+4}$ ② $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ ③ $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$
④ $\dfrac{1}{x^2+x-2}$ ⑤ $\dfrac{1}{x^2-4}$

해설

(준식) $= \dfrac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \dfrac{x+3}{(x-3)(x+2)}$

$= \dfrac{1}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x^2-4}$

7. $\dfrac{b}{a}=2$, $\dfrac{c}{b}=3$일 때, $\dfrac{a+b}{b+c}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{3}{8}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$b=2a$이므로 $c=3b=3(2a)=6a$

$\therefore \dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{a+2a}{2a+6a}=\dfrac{3}{8}$

8. $y = \dfrac{3 - ax}{1 - x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = \dfrac{3 - ax}{1 - x} = \dfrac{ax - 3}{x - 1} = \dfrac{a - 3}{x - 1} + a$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

$\therefore \ a = -2$

9. 함수 $y=\frac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\frac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\frac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+2$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$ 이고

$y=\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

10. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ 2+3+4=9$

11. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2} - |b|$를 간단히 하면?

① $-2a$　② $-a$　③ $a-2b$
④ a　⑤ 0

해설
$a \geq 0,\ b < 0$
$|a-b| - |b| = (a-b) + b = a$

12. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(x-a)+1}+2+b \\ &= \sqrt{2x-2a+1}+2+b \end{aligned}$$

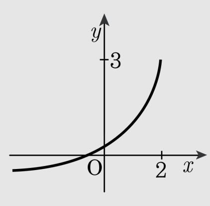
이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a = 2,\ -2a+1 = b,\ 2+b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c = -2$

13. 무리함수 $y=-\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면　② 1 , 4 사분면
③ 1 , 2 , 3 사분면　④ 2 , 3 , 4 사분면
⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로
$\therefore$ 1, 2, 3 사분면을 지난다.



14. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

15. 정의역이 $\{x \mid x < 2\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{10-3x}{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{5-x}+7$ 에 대하여 $(g \circ f)(-2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$이므로

$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$

$f(-2) = \dfrac{10-3\cdot(-2)}{-2-2} = -4$

$\therefore\ (g \circ f)(-2) = g(-4) = 2\sqrt{5-(-4)}+7 = 13$

16. 다음 보기 중 $X=\{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f: x \rightarrow |x|^2$　　㉡ $g: x \rightarrow x+2$

㉢ $h: x \rightarrow |x|+1$　　㉣ $i: x \rightarrow x^2-1$

㉤ $j: x \rightarrow |x|+3$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1)=|-1|^2=1 \in Y$
$f(1)=|1|^2=1 \in Y$
$f(2)=|2|^2=4 \in Y$
㉡ $g(-1)=-1+2=1 \in Y$
$g(1)=1+2=3 \in Y$
$g(2)=2+2=4 \in Y$
㉢ $h(-1)=|-1|+1=2 \in Y$
$h(1)=|1|+1=2 \in Y$
$h(2)=|2|+1=3 \in Y$
㉣ $i(-1)=i(1)=0 \notin Y$
㉤ $j(2)=5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

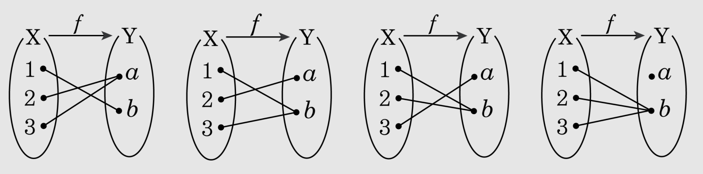
17. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



18. 함수 $f(x)=ax+b(a>0)$에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)=4x+3$일 때 $f(1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$\qquad\qquad =a^2x+ab+b$
$a^2x+ab+b=4x+3$
x에 대한 항등식 이므로 $a^2=4, ab+b=3$
$a>0$ 이므로 $a=2, b=1$
$\therefore\ f(x)=2x+1$
$\therefore\ f(1)=3$

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x-3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x-3$에 대하여
$f(f(x)) = 2f(x)-3 = 2(2x-3)-3 = 4x-9$
$f(f(f(x))) = f(4x-9) = 2(4x-9)-3 = 8x-21$
$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x-21 = x$
$\therefore x = 3$

20. 함수 $f(x)$가 $f\left(\dfrac{x+1}{5}\right)=x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$\dfrac{x+1}{5}=t$ 로 놓으면 $x=5t-1$
$f(t)=(5t-1)+2=5t+1$ 에서
$f(x)=5x+1$

$\therefore\ f(f(x))=f(5x+1)=5(5x+1)+1$
$=25x+6$
$\therefore\ f(f(10))=25\cdot 10+6=256$

21. 두 집합 $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$ 에서 $f : X \to Y$, $f(x) = 3x - 1$ 의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$ 가 존재할 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

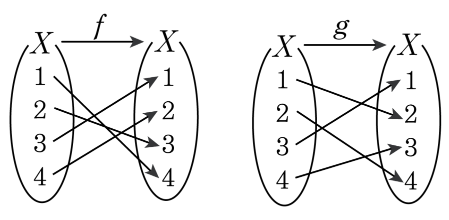
▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

함수 $f(x)$ 는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(0, a)$, $(2, b)$ 를 지나야 한다.
$a = f(0) = -1$, $b = f(2) = 5$
$\therefore\ a + b = 4$

22. 두 함수 f, g 가 각각 다음 그림과 같이 정의될 때, $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 f 는 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
이 때, $f(4) = 2$ 이므로 $f^{-1}(2) = 4$
$\therefore \left(g \circ f^{-1}\right)(2) = g\left(f^{-1}(2)\right) = g(4) = 3$

23. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 3　　③ 6　　④ 8　　⑤ 11

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ $g^{-1}(2) = a$ 라고 하면

$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$

$\therefore\ a = 1$ 이므로 $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$

$\therefore\ f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3\ (\because 1 < 2)$

24. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \le x \le 2$) 의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$　$\therefore y = x + 1$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$　$\therefore y = x$
$1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$　$\therefore y = x - 1$
$x = 2$ 일 때, $[x] = 2$　$\therefore y = 0$
따라서, $y = x - [x]$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

25. 분수식 $\frac{1}{x+2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{x^2+x+6}{x^2-4}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{1}{x^2-4}$ ② $\frac{-1}{x^2-4}$ ③ $\frac{x}{x^2-4}$
④ $\frac{-x}{x^2-4}$ ⑤ $\frac{x^2}{x^2-4}$

해설

$\frac{1}{x+2}+\frac{-2}{x-2}+\frac{x^2+x+6}{x^2-4}$
$=\frac{x-2-2x-4+x^2+x+6}{x^2-4}$
$=\frac{x^2}{x^2-4}$

26. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}=\frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x(x+8)}=\frac{4}{x(x+8)}$$

$$=\frac{4}{9}$$

$\therefore x(x+8)=9$

$x^2+8x-9=(x-1)(x+9)=0$

$x>0$ 이므로 $x=1$

27. 다음 분수함수의 그래프 중에서 평행이동하여 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 고르면?

① $y = \frac{x+4}{x+3}$ ② $y = \frac{x+4}{x-3}$ ③ $y = \frac{4x-4}{2x-1}$
④ $y = \frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y = \frac{x+3}{2-x}$

해설

① $y = \frac{x+4}{x+3} = \frac{(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 1$

② $y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1$

③ $y = \frac{4x-4}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-2}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1} + 2 = \frac{-1}{x-\frac{1}{2}} + 2$

④ $y = \frac{2x}{2x-1} = \frac{(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 1 = \frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + 1$

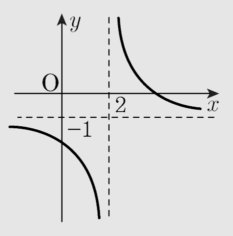
⑤ $y = \frac{x+3}{2-x} = \frac{-(2-x)+5}{2-x} = \frac{-5}{x-2} - 1$

28. 다음 중 함수 $y=\dfrac{-x+4}{x-2}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면　　② 제2사분면
③ 제3사분면　　④ 제4사분면
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y=\frac{-x+4}{x-2}$$
$$y=\frac{-(x-2)-2+4}{x-2}$$
$$y=\frac{2}{x-2}-1$$



따라서 제2사분면을 지나지 않는다.

29. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$2-x \ge 0,\ x+3>0$

$\therefore -3<x\le 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

30. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\therefore$ (준 식) $= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})$

$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$

31. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $n < a-b < n+1$을 만족하는 n의 값을 구하여라. (단, n은 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$n < 0-\sqrt{2}+1 < n+1$

$n-1 < -\sqrt{2} < n$

$n-1 < -1.414\cdots < n$

$\therefore\ n = -1$

32. $x=\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=12-1=11$

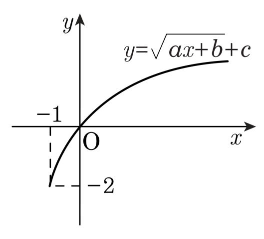
33. 함수 $y=a\sqrt{bx}$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ $a>0, b<0$ 이면 정의역은 $\{x \mid x \le 0\}$ 이다.
> ㉡ $b>0$ 이면 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$ 이다.
> ㉢ $a<0, b>0$ 이면 제 1 사분면을 지난다.
> ㉣ $y=-a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설
㉡ $a>0$ 이면 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$ 이다.
㉢ $a<0, b>0$ 이면 제 4 사분면을 지난다.
㉣ $y=-a\sqrt{-bx}$ 의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 옳은 것은 ㉠ 이다.

34. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의
그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 −1 만큼,
y 축의 방향으로 −2 만큼
평행이동한 것이므로
$y = \sqrt{ax+b}+c$
$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{a(x+1)}-2$
이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$
$\therefore \sqrt{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4$
$y = \sqrt{4x+4}-2$
$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

35. 무리함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$ 을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때
$2=\sqrt{2k}$, $2k=4$
$\therefore k=2$
또, 함수 $y=\sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 $(3,\ 6)$ 을 지날 때
$6=\sqrt{3k}$, $3k=36$
$\therefore k=12$
따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
$2\le k\le 12$ 이므로
정수 k 는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11 개다.

36. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ −1 ④ −2 ⑤ −3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}$$
$$=\frac{1+3}{1-3}=-2$$
$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}$$
$$=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$
$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$
$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

37. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$　　② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$　　④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$

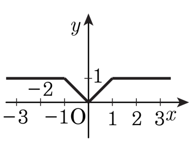
(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$

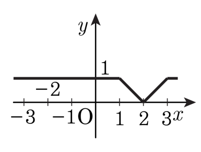
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

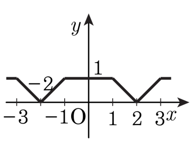
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로

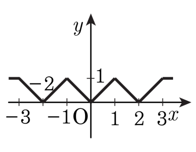
$a < -1$ 또는 $a > 1$

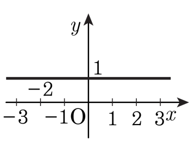
38. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


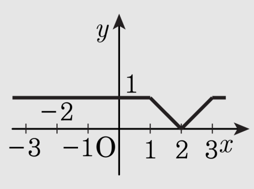
해설

$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$

$g(x) = x - 2$ 에서

$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$



39. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$ 이고 $f(3x-4) = g(x)$ 라 할 때, $g^{-1}(3)$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(3) = k$ 라 하면 $g(k) = 3$
$\therefore f(3k-4) = g(k) = 3$
$f^{-1}(3) = 3k-4 = 2$ 이므로 $k = 2$
$\therefore g^{-1}(3) = 2$

40. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

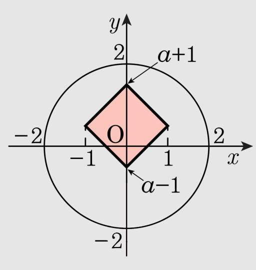
해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

41. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q :| x | + | y - a |\leq 1$에 대하여 q는 p이기 위한 충분조건일 때, a의 값의 범위를 구하면?

① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설



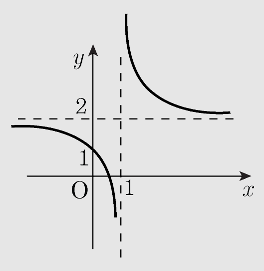
두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
$q :| x | + | y - a |\leq 1$ 에 대하여
q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
각각의 진리집합을 P, Q라 하면 $Q \subset P$ 이다.
$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원이고,
$| x | + | y - a |= 1$ 의 그래프는
$| x | + | y |= 1$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
이 때 $P = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
$Q = \{(x,\ y) \mid | x | + | y - a | \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.
따라서 $Q \subset P$이려면 다음 그림에서
$a + 1 \leq 2$, $a - 1 \geq -2$
$\therefore -1 \leq a \leq 1$

42. 분수함수 $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \le 1\}$ 일 때, 다음 중 정의역을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid 0 < x < 1\}$
② $\{x \mid 0 \le x < 1\}$
③ $\{x \mid 0 < x \le 1\}$
④ $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$
⑤ $\{x \mid -1 \le x < 1\}$

해설

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$



$y = 1$ 일 때, $1 = \dfrac{2x-1}{x-1}$ 이므로, $x = 0$

정의역은 $\{x \mid 0 \le x < 1\}$

43. $0 \le x \le 2$일 때, 함수 $y = \dfrac{2x-4}{x-4}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y = \dfrac{2x-4}{x-4} = \dfrac{4}{x-4} + 2$

$x = 0$일 때 최대이므로, $M = \dfrac{4}{0-4} + 2 = 1$

$x = 2$일 때 최소이므로, $m = \dfrac{4}{2-4} + 2 = 0$

$\therefore\ Mm = 1 \times 0 = 0$

44. $x \ge 1$이고 $a = \dfrac{2x}{x^2+1}$일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$

$= \sqrt{1+\dfrac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1-\dfrac{2x}{x^2+1}}$

$= \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}}$

$= \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(\because\ x \ge 1)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$에서 $x=1$일 때

최댓값 $f(1) = \sqrt{2}$

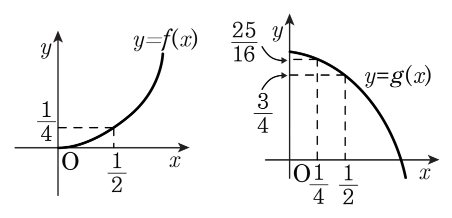
45. $x = 2 + \sqrt{3}$일 때, $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$의 값은?

① $11 + 5\sqrt{3}$　② $11 + 10\sqrt{3}$　③ $22 + 5\sqrt{3}$
④ $22 + 10\sqrt{3}$　⑤ $22 + 15\sqrt{3}$

해설

$x = 2 + \sqrt{3}$에서 $x - 2 = \sqrt{3}$
양변을 제곱하면
$x^2 - 4x + 4 = 3 \therefore x^2 - 4x + 1 = 0$
$x^3 - 2x^2 + 3x + 4$
$= (x + 2)(x^2 - 4x + 1) + 10x + 2$
$= 10x + 2$
$= 10(2 + \sqrt{3}) + 2$
$= 22 + 10\sqrt{3}$

46. 정의역이 실수 전체의 집합인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $x>0$ 일 때의 그래프가 다음 그림과 같고, $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$ 를 만족할 때, $(g\circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?



① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{11}{9}$　　⑤ $\frac{25}{16}$

해설

$f(-x)=-f(x)$ 이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

$g(-x)=g(x)$

$(g\circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=g\left(-\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{16}$

47. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$ 이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 25 ② 32 ③ 77 ④ 85 ⑤ 100

해설

$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$에서

$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17}$이므로

$17 < a < 34$

이 중에서 $\frac{17}{a}$가 유한소수가 되게하는 정수는

20, 25, 32이므로

$20 + 25 + 32 = 77$

48. 수도꼭지 A, B, C 세 개가 달려있는 목욕탕 욕조에 물을 가득 채우는데, A 와 B 를 동시에 사용하면 p 분, B 와 C 를 동시에 사용하면 q 분, C와 A 를 동시에 사용하면 r 분이 걸린다고 한다. A, B, C 를 동시에 사용하면 몇 분이면 가득 차는가?

① $p+q+r$ ② $\dfrac{pq+qr+rp}{p+q+r}$ ③ $\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$

④ $\dfrac{p+q+r}{pq+qr+rp}$ ⑤ $\dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$

해설

욕조의 부피를 V , 수도꼭지 A, B, C 에서 매 분 나오는 물의 양을 a, b, c 라 하면

$\dfrac{V}{a+b}=p\cdots$㉠

$\dfrac{V}{b+c}=q\cdots$㉡

$\dfrac{V}{c+a}=r\cdots$㉢

㉠에서 $a+b=\dfrac{V}{p}\ \cdots$㉠'

㉡에서 $b+c=\dfrac{V}{q}\ \cdots$㉡'

㉢에서 $c+a=\dfrac{V}{r}\ \cdots$㉢'

㉠' + ㉡' + ㉢' 을 하면

$2(a+b+c)=\dfrac{grV+prV+pqV}{pqr}$

$\therefore a+b+c=\dfrac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}$

구하는 값은 $\dfrac{V}{a+b+c}$ 이므로

$\dfrac{V}{\dfrac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}}=\dfrac{2pqr}{pq+qr+rp}$(분)

49. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}} = b + c\sqrt{2}$를 만족시키는 양의 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면
$20 + a\sqrt{2} = (b + c\sqrt{2})^3$
$= b^3 + 3b^2c\sqrt{2} + 3bc^2 \cdot\ 2 + c^3 \cdot\ 2\sqrt{2}$
$(3b^2c + 2c^3 - a)\sqrt{2} + b^3 + 6bc^2 - 20 = 0$
$\therefore\ 3b^2c + 2c^3 - a = 0$ 에서 $c(3b^2 + 2c^2) = a \ \cdots$㉠
$b^3 + 6bc^2 - 20 = 0$에서 $b(b^2 + 6c^2) = 20 \cdots$㉡
$b,\ c$는 양의 정수이므로
$b^2 + 6c^2 = 10,\ b = 2,\ c = 1$
㉠에서 $a = 14 \quad \therefore\ a + b + c = 17$

50. $f(x) = \sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$와 $f(x), g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{3}$ ② $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{2}$

③ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{2}$ ④ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{3}$

⑤ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1}+1$ 에 대하여

i) $y = \sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면

$y-1 = \sqrt{x-1}$ ······ ㉠

㉠을 제곱하면

$(y-1)^2 = x-1,\ y^2-2y+1 = x-1,\ x = y^2-2y+2$

$\therefore\ g(x) = x^2-2x+2$

ii) $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은

$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$와 $y=x$의 교점을

구하면 된다.

$g(x) = x$에서 $x^2-2x+2 = x$

$x^2-3x+2 = 0$, $(x-2)(x-1) = 0$

그러므로 $x = 2$ *or* $x = 1$에서 $y = 2$ *or* $y = 1$

따라서 두 점$(1,\ 1), (2,\ 2)$사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$