**1.** 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $A$에서 $A$로의 함수 $f$ 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 $f^{-1}$가 존재하므로, $f$는 일대일대응이다.

( i ) $f(1) = 1$일 때,
$f(2) = 2,\ f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3,\ f(3) = 2$

( ii ) $f(1) = 2$일 때,
$f(2) = f^{-1}(2) = 1$이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$일 때,
$f(3) = f^{-1}(3) = 1$이므로 $f(2) = 2$

( i ), ( ii ), (iii)에서 함수 $f$의 개수는 4개이다.

**2.** 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2)$$
$$= 2(x+2) - 3 = 2x + 1$$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x + 1$로 놓고 $x$에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$이다.

**3.** 실수 전체의 집합 $R$ 에서 $R$ 로의 일대일대응인 세 함수 $f$, $g$, $h$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, $I$ 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$ ∴ 옳다.

**4.** 함수 $f(x) = | x-1 | -a |$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로
$f(2) = | 2-1 | -a | = 4 \rightarrow | 1-a | = 4$
따라서 $a = -3,\ 5$ 이므로 양수 $a = 5$

**5.** $y=\dfrac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x=a,\ y=b$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

$$y=\frac{3x+1}{2x-1}$$

$$=\frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}\ \ a+b=2$

**6.** $-1 < a < 2$일 때, $\sqrt{(a-2)^2} + |a+1|$을 간단히 하면?

① 3 ② $-3$ ③ $2a-1$

④ $2a+1$ ⑤ $-2a+1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-2)^2} + |a+1| &= |a-2| + |a+1| \\ &= -(a-2) + a + 1 = 3\end{aligned}$$

**7.** $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3+y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$x+y=4,\quad xy=1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\times4=52$

**8.** ${}_5P_0 = a,\ {}_5P_5 = b$라 할 때, $b - a$의 값은?

① 104 ② 111 ③ 115 ④ 119 ⑤ 120

해설

$a = {}_5P_0 = 1$
$b = {}_5P_5 = 5! = 120$
$\therefore\ b - a = 119$

**9.** 다음 유리식을 간단히 하여라.

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}$$

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}} &= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}}\\ &= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}\\ &= 1-\cfrac{\cfrac{1}{-1}}{\sqrt{2}-1}\\ &= 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\end{aligned}$$

**10.** $x+\frac{1}{x}=2$일 때, $x^2-\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=2^2-4=0$$

$$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\times 2=0$$

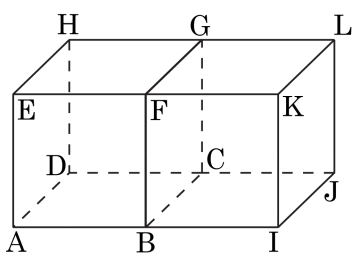
**11.** 식 $(a+b+c)(x+y+z)$ 를 전개하였을 때, 항의 개수는?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

해설

$a, b, c$ 가 선택할 수 있는 항이 각각 3 가지씩 있으므로 $3+3+3=9$

**12.** 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 $A$ 에서부터 $L$ 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 $B$ 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



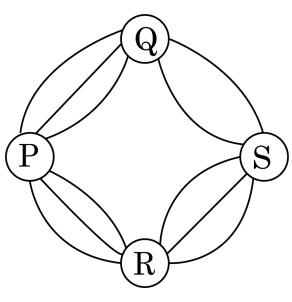

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설




위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

**13.** 네 지점 $P$, $Q$, $R$, $S$ 를 연결하는길이 아래 그림과 같다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 $P$ 에서 $S$ 로가는 길을 택하는 방법은 몇가지인지 구하여라.




▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 15 가지

해설

(1) $P \to Q \to S$ 인 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
(2) $P \to R \to S$ 인 경우 $3 \times 3 = 9$ (가지)
이때, (1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 방법의 수는 $6 + 9 = 15$ (가지) 이다.

**14.** 5000 원 짜리 지폐가 2 장, 1000 원짜리 지폐가 3 장, 500 원짜리 동전이 4 개 있다. 이 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

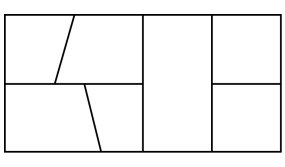
▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 59 가지

해설

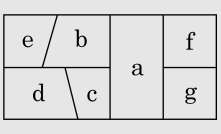
5000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 3 가지
1000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 4 가지
500 원짜리 동전을 지불하는 방법의 수는 5 가지
이때 지불하지 않는 경우가 1 가지이므로
구하는 방법의 수는 $3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$

**15.** 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑의 5 가지 색을 사용하여 다음 그림과 같은 도형의 각 면을 색칠하려고 한다. 변의 일부 또는 전부를 공유하는 두 면은 같은 색을 사용하지 않도록 할 때, 모든 면을 색칠하는 방법의 수는?



① 4020 ② 5160 ③ 6480 ④ 7260 ⑤ 8400

해설




$a$ 에 색칠하는 방법의 수는 5 가지
$b$ 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
$c$ 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
$d$ 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지
$e$ 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지이므로
$a, b, c, d, e$ 에 색칠하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)
$f$ 에 색칠하는 방법의 수는 4 가지
$g$ 에 색칠하는 방법의 수는 3 가지 이므로
$f, g$ 에 색칠하는 방법의 수는 $4 \times 3 = 12$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
$540 \times 12 = 6480$ (가지)

**16.** $n$ 권의 책이있다.( 단, $n \geq 5$) 이 $n$ 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. $n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

$n$ 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로

${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42 \quad \therefore \ (n+6)(n-7) = 0$

한편, $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

**17.** 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5,6,7\}$에서 $X$에서 $Y$로의 일대일함수의 갯수는?

① 12개 ② 24개 ③ 28개 ④ 32개 ⑤ 36개

해설

집합 $Y$의 원소 $4,5,6,7$에서 서로 다른 세 개를 뽑아
$1 \rightarrow \square,\ 2 \rightarrow \square,\ 3 \rightarrow \square$
의 $\square$ 안에 늘어놓는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는
${}_4P_3 = 4\times 3\times 2 = 24$(개)

**18.** $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$　　㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\dfrac{a+2b}{a-2b} = \dfrac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \cdots$ 참

㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc,\ ad = bc \cdots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓

**19.** $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때, $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\sqrt{1\pm 2x}=\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}$$

$$(\text{준식})=\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{6}{6}=1$$

**20.** $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 48 개

해설

일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 경우는 다음 두 가지이다.

□□□3□6, □□□6□3

이때, 나머지 네 자리에 1, 2, 4, 5 의 숫자를 배열하는 방법의 수는

각각 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$(가지)

따라서, 구하는 자연수는 모두 $2 \times 24 = 48$(개) 이다.

**21.** 5쌍의 부부 중에서 임의로 4명을 뽑을 때, 그 중에서 부부는 한쌍만 포함되는 경우의 수는?

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

해설

먼저 5쌍의 부부중 한 쌍의 부부를 선택하고
나머지 사람들 중 2명을 뽑는 경우에서 부부가
쌍으로 뽑히는 경우를 제외하여 곱한다.
$\therefore {}_5C_1 \times ({}_8C_2 - {}_4C_1) = 120$

**22.** 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점 중 세 선분이 교차하는 점이 없다고 할 때 대각선의 교점은 몇 개인지 구하여라. (단 꼭짓점은 제외한다.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 495 개

해설

대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정되고 두 대각선은 4 개의 점에 의해 결정되므로 십이각형의 대각선의 교점의 최대 개수는 ${}_{12}C_4 = 495$

**23.** 임의의 양의 실수 $x$에 대하여, $x$를 넘지 않는소수의 개수를 $f(x)$라 하자. 예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right)=1,\ f(5)=3$ 이다.<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(10)=4$

㉡ 임의의 실수 $x$에 대하여 $f(x)<x$ 이다.

㉢ 임의의 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x+1)=f(x)$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

10 이하의 소수는 $2,3,5,7$ 이므로 $f(10)=4$
㉡ $f(x)<[x]\le x$ 이므로 $f(x)<x$
㉢ $x=2$인 경우 $f(3)=2, f(2)=1$이므로 $f(3)\neq f(2)$
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

**24.** 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

| · 모든 실수 $x$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$<br>· 임의의 실수 $x$ , $y$ 에 대하여<br>$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립한다. |
|---|

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

| ( i ) $f(0) = 2$<br>( ii ) $f(-x) = -f(x)$<br>(iii) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$<br>(iv) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2$<br>$= f(x+y)f(x-y) + 4$ |
|---|

① i , ii ② i , ii , iii ③ i , iii, iv

④ ii , iii, iv ⑤ i , ii , iii, iv

해설

( i ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.
정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$
$f(0)(f(0)-2) = 0$ 이므로
$\therefore f(0) = 2\ (\because f(x) \neq 0\ )$
( ii ) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = x$ 를 대입하면
$f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.
$2f(x) = f(x) + f(-x)(\because\ f(0) = 2)$
$\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ii 는 옳지 않다.
(iii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면
$f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$
$\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2\ (\because f(0) = 2\ )$
(iv) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = x+y,\ y = x-y$ 를 대입하면
$f(x+y)f(x-y) = f((x+y)+(x-y)) + f((x+y)-(x-y))$
$f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x),\ f(2y)$ 에 적용하면
$f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.
$\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

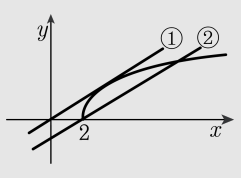
**25.** 곡선 $y=\sqrt{2x-4}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 $a$값의 범위를 정하면?

① $-2 \le a < 0$　② $-1 \le a < 0$　③ $-2 \le a < -1$

④ $-1 \le a < 1$　⑤ $0 \le a < 1$

해설

그림처럼 ①,② 사이에 있어야 교점이 두 개 다.




① 접할 때

$\frac{1}{2}x+a=\sqrt{2x-4}$

$x^2+4(a-2)x+4a^2+16=0$

$\frac{D}{4}=2^2(a-2)^2-4a^2-16=0,\ \therefore a=0$

② 점 $(2,0)$ 을 지날 때,

$0=\frac{1}{2}\times 2+a \quad \therefore\ a=-1$

$-1 \le a < 0$