

1. 소수 97 은 각 자리의 숫자를 바꾸면 79 가 되어 역시 소수가 된다. 이처럼 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 50 보다 작은 두 자리의 소수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 31

▷ 정답 : 37

해설

에라토스테네스의 체를 이용하여 50 보다 작은 두 자리 소수를 구하면 다음과 같다.

10 (11) 12 (13) 14 15 16 (17) 18 (19)  
20 21 22 (23) 24 25 26 27 28 (29)  
30 (31) 32 33 34 35 36 (37) 38 39  
40 (41) 42 (43) 44 45 46 (47) 48 49

이 중 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 수를 찾아 적으면 11, 13, 17, 31, 37 이다.

2.  $360 \times a = b^2$  을 만족시키는 자연수  $a, b$  중에서 가장 작은 수를 각각  $x, y$  라고 할 때  $x + y$  의 값으로 알맞은 것은?

① 70      ② 80      ③ 90      ④ 100      ⑤ 110

해설

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

지수가 2의 배수이어야 하므로  $x = 2 \times 5$  이다.

$$(2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2, \quad x = 10, \quad y = 60$$

따라서  $x + y = 70$  이다.

3. 약수의 개수가 24 개이고,  $2^a \times 3^b \times 5^c$  으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라. (단  $a, b, c$  는 자연수)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 9 개

해설

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 4 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 \times 2 \\ &= 2 \times 6 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 = 3 \times 2 \times 4 \\ &= 6 \times 2 \times 2 \end{aligned}$$

이므로 자연수는 9 개이다.

4.  $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때,  $\square$  안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\square = a^x$  ( $a$ 는소수) 라고 하면  $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로

$(4 + 1) \times (x + 1) = 15, x + 1 = 3, x = 2$  이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는  $a = 2$  이다.

따라서  $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$  이다.



5. 200 과  $2^2 \times x$  의 최대공약수가 20 일 때,  $x$  의 최솟값은?

- ① 5                      ② 4                      ③ 3                      ④ 2                      ⑤ 1

해설

$200 = 2^3 \times 5^2$  이고  $20 = 2^2 \times 5$  이므로  
 $x = 5$

6.  $a, b$ 의 최대공약수가 36 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 16은  $a, b$ 의 공약수이다.
- ㉡ 1, 2, 36은  $a, b$ 의 공약수이다.
- ㉢  $a, b$ 의 공약수는 모두 10개이다.
- ㉣  $a, b$ 의 공약수는 모두 72의 약수이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣
- ④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a, b$ 의 공약수는 36의 약수와 같으므로 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다.  
㉠. 16은  $a, b$ 의 공약수가 아니다.  
㉢.  $a, b$ 의 공약수는 9개이다.

7. 160 와 280 의 공약수 중에서 어떤 자연수의 제곱이 되는 것을 바르게 고르면?

① 4                      ② 9                      ③ 16                      ④ 25                      ⑤ 27

해설

$160 = 2^5 \times 5$ ,  $280 = 2^3 \times 5 \times 7$  이므로 두수의 최대공약수는  $2^3 \times 5 = 40$  이다.

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로 40 의 약수인 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 중에서 제곱수는 1,4 이다.

8. 어느 반의 여학생 수는 36 명이고 남학생 수는 45 명이다. 봉사활동을 하기 위해 여학생  $a$  명과 남학생  $b$  명씩을 한 조로 나누려고 한다. 이때 되도록 많은 조로 나누어서 나누어진 조의 수를  $c$  라 할 때,  $2a - b + c$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$c$  는 36 과 45 의 최대공약수이므로  $c = 9$  ,  
 $a = 36 \div 9 = 4$  ,  $b = 45 \div 9 = 5$   
따라서  $2a - b + c = 8 - 5 + 9 = 12$



9. 7로 나누면 나머지가 6, 6으로 나누면 나머지가 5, 5로 나누면 나머지가 4, 4로 나누면 나머지가 3, 3으로 나누면 나머지가 2가 되는 최소의 자연수에서 각자리 숫자의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

조건을 만족하는 수는  
(7, 6, 5, 4, 3의 공배수)-1의 꼴이고  
7, 6, 5, 4, 3의 최소공배수는 420이다.  
따라서 최소의 자연수는  $420 - 1 = 419$ 이다.  
 $\therefore 4 + 1 + 9 = 14$

10. 두 자연수  $A, B$ 의 최대공약수가 5이고,  $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$  일 때, 두 자연수  $A, B$ 의 최소공배수는?

① 280      ② 350      ③ 420      ④ 490      ⑤ 560

해설

$A$ 와  $B$ 의 최대공약수가 5이고  $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$  이므로,  $A = 35 = 5 \times 7$ ,  
 $B = 40 = 2^3 \times 5$  이다.  
따라서  $A$ 와  $B$ 의 최소공배수는  $2^3 \times 5 \times 7 = 280$  이다.

11. 1부터 100까지의 자연수 중에서 3, 4중 어떤 수로도 나누어떨어지지 않는 수의 개수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :                      개

▷ 정답 : 50 개

해설

1부터 100까지의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33개  
1부터 100까지의 자연수 중 4의 배수의 개수는 25개  
1부터 100까지의 자연수 중 3의 배수이면서 4의 배수인 것의 개수는 8개  
1부터 100까지의 자연수 중 3의 배수이거나 4의 배수인 것의 개수는  
 $33 + 25 - 8 = 50$  개  
따라서 1부터 100까지의 자연수 중에서 3, 4중 어떤 수로도 나누어떨어지지 않는 수의 개수는  
 $100 - 50 = 50$  개

12.  $\frac{12}{n}, \frac{56}{n}, \frac{32}{n}$  를 자연수로 만드는 자연수  $n$  들을 모두 곱하면?

① 12

② 10

③ 8

④ 7

⑤ 6

해설

$n$  은 12, 56, 32 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로  
12, 56, 32 의 최대공약수는 4 이다.  
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.  
따라서 8 이다.



13. 일곱 자리의 수  $80xy397$  은 7 의 배수이고,  $x \times y \neq 0$  이다. 이를 만족하는 순서쌍  $(x, y)$  의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 11개

해설

7의 배수는 뒤에서부터 세 자리씩 끊어서 더하고 뺄 수가 0 이거나 7의 배수인 수이므로,

$$8 - xy + 397 = 7k$$

$$\rightarrow 405 - xy = 7k \text{ 이므로}$$

$$xy = 06, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69,$$

76, 83, 90, 97이다.

$x \times y \neq 0$  이려면

$$xy = 13, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 97$$

∴ 만족하는 순서쌍  $(x, y)$  의 개수는 11 개이다.

14. 다음 주어진 수 중에서 소인수가 같은 것은?

- ① 144      ② 60      ③ 72      ④ 160      ⑤ 98

해설

- ①  $2^4 \times 3^2$   
②  $2^2 \times 3 \times 5$   
③  $2^3 \times 3^2$   
④  $2^5 \times 5$   
⑤  $2 \times 7^2$

15. 자연수 160 에  $n$  을 곱하면 자연수의 제곱이 된다고 한다. 이 때,  $n$  이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.(단,  $n$  은 50 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$160 \times n = 2^5 \times 5 \times n = m^2$  이라 하면  
가장 작은  $n = 2 \times 5$   
따라서  $n$  이 될 수 있는 50 미만의 수는  
 $2 \times 5 = 10$   
 $2 \times 5 \times 2^2 = 40$   
 $\therefore 10, 40$   
 $\therefore 10 + 40 = 50$

16. 자연수  $n$ 의 소인수들의 합을  $P(n)$ 으로 나타낸다. 예를 들어,  $18 = 2 \times 3^2$  이므로  $P(18) = 2 + 3 = 5$ 이다. 이 때,  $\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{P(30)+P(60)}{P(12)+P(24)}$ 를 만족하는  $x$ 의 값 중 두 자리 자연수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 45

▷ 정답 : 75

해설

$P(30) = 10, P(60) = 10, P(12) = 5, P(24) = 5$ 이므로  
 $\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{P(30)+P(60)}{P(12)+P(24)}$ 에서  
 $\frac{P(x)-4}{P(x)-6} = \frac{10+10}{5+5} = 2$   
 $P(x)-4 = 2P(x)-12$   
 $P(x) = 8$   
소인수의 합이 8 인 수는 3 과 5 만을 소인수로 가진 수이다.  
 $\therefore x = 15, 45, 75$



17. 어떤 자연수  $x$  의 약수의 개수를  $R(x)$  라 하고,  $R(40) \times R(75) = a$  라 할 때,  $R(a)$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$40 = 2^3 \times 5$  이므로  $R(40) = (3+1) \times (1+1) = 8$  이다.

$75 = 3 \times 5^2$  이므로  $R(75) = (1+1) \times (2+1) = 6$  이다.

$\therefore 8 \times 6 = 48$

따라서  $48 = 2^4 \times 3$  이므로  $R(48) = (4+1) \times (1+1) = 10$  이다.

18.  $a$ 가 자연수일 때,  $f(a)$ 는  $a$ 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.  
 $x$ 는 1 이상 100 이하이고,  $f(x) = 3$  일 때,  $x$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :                          개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3개인 수는  
(소수)<sup>2</sup>이므로  
100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는  
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4개

19. 다음 중 서로소인 것은?

① (3, 15)

② (22, 13)

③ (100, 45)

④ (6, 9)

⑤ (10, 12)

해설

서로소는 최대공약수가 1인 두 자연수를 말하므로 (22, 13)이다.

20. 600을 자연수  $a$ 로 나누면  $b^2$ 이 된다고 할 때, 가능한  $\frac{a}{b}$ 의 값 중 두 번째로 큰 값은? (단,  $b$ 는 자연수)

- ①  $\frac{1}{2}$
- ② 600
- ③ 300
- ④ 150
- ⑤ 75

해설

$\frac{600}{a} = \frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{a}$ 가 제곱수이어야 하므로

$a = 2 \times 3 \times p^2$  ( $p$ 는 자연수) 꼴의 600의 약수이다.

$a = 2 \times 3 \times 1^2 = 6$ 일 때,

$$\frac{600}{6} = 100 = 10^2 \quad \therefore b = 10$$

$a = 2 \times 3 \times 2^2 = 24$ 일 때,

$$\frac{600}{24} = 25 = 5^2 \quad \therefore b = 5$$

$a = 2 \times 3 \times 5^2 = 150$ 일 때,

$$\frac{600}{150} = 4 = 2^2 \quad \therefore b = 2$$

$a = 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$ 일 때,

$$\frac{600}{600} = 1^2 \quad \therefore b = 1$$

$$\frac{6}{10} < \frac{24}{5} < \frac{150}{2} < 600 \text{ 이므로}$$

$\frac{a}{b}$ 의 값 중 두 번째로 큰 값은  $\frac{150}{2} = 75$



21. 화장실 바닥의 가로와 세로의 길이가 각각 300 cm, 270 cm인 화장실 벽의 적당한 높이에 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 띠처럼 둘러 붙이려고 한다. 타일을 쪼개지 않고 붙이려고 할 때, 가능한 타일의 한 변의 길이가 아닌 것은?



- ① 1 cm      ② 2 cm      ③ 4 cm      ④ 5 cm      ⑤ 10 cm

해설

타일의 한 변의 길이가 300과 270의 공약수이면 타일을 쪼개지 않고 붙일 수 있다.  
 $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ ,  $270 = 2 \times 3^3 \times 5$  이므로  
두 수의 최대공약수는  $2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.  
따라서 타일의 한 변의 길이는 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm, 15 cm, 30 cm가 가능하다.

22. 세 변의 길이가 88m, 96m, 120m인 삼각형 모양인 땅의 가장자리에 일정한 간격으로 말뚝을 박으려고 한다. 세 모퉁이에는 반드시 말뚝을 박고, 가능한 적은 수의 말뚝을 박을 때, 필요한 말뚝의 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :                        38   개

▷ 정답 : 38 개

해설

88, 96, 120 의 최대공약수는 8 이므로 8m 간격으로 말뚝을 박으면 된다.  
∴ (필요한 말뚝의 수)  
=  $(88 \div 8) + (96 \div 8) + (120 \div 8)$   
=  $11 + 12 + 15$   
= 38(개)

23. 세 수 124, 156, 204를 어떤 수로 나누었더니 그 나머지가 모두 같았다. 어떤 수 중에서 가장 큰 수와 그 때의 나머지를 구하여라.

- ① 어떤 수 : 7, 나머지 : 2      ② 어떤 수 : 9, 나머지 : 5  
③ 어떤 수 : 12, 나머지 : 6      ④ 어떤 수 : 16, 나머지 : 2  
⑤ 어떤 수 : 16, 나머지 : 12

해설

어떤 수를  $x$ , 나머지를  $r$ 이라 하고 세 수 124, 156, 204의 몫을 각각  $Q_1, Q_2, Q_3$ 라 하면

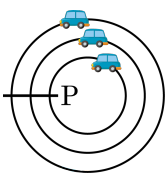
$$124 = xQ_1 + r, 156 = xQ_2 + r, 204 = xQ_3 + r \text{이므로}$$

각각의 수의 차는  $x$ 로 나누어 떨어진다.

$$204 - 124 = 80, 204 - 156 = 48, 156 - 124 = 32$$

32, 48, 80의 최대공약수는 16이므로 어떤 수는 16이고 그 때의 나머지는 12이다.

24. 장난감 자동차 세 대가 다음 그림과 같은 원을 따라 각각의 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있다. 18분 동안 A 자동차는 24바퀴를 돌고, B 자동차는 36바퀴, C 자동차는 45바퀴를 돈다. 세 자동차가 동시에 P 지점에서 출발하여 1시간 10분 동안 일정한 속도로 돌았다면 동시에 P 지점을 몇 번 통과하는가?



- ① 9번      ② 10번      ③ 11번      ④ 12번      ⑤ 13번

해설

A, B, C 세 자동차가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은  $\frac{18}{24}$  분,  $\frac{18}{36}$  분,  $\frac{18}{45}$  분이다.  
 $\frac{18}{24}$  분 = 45초,  $\frac{18}{36}$  분 = 30초,  $\frac{18}{45}$  분 = 24초이다.  
45, 30, 24의 최소공배수는 360이므로  
360초 = 6분마다 한 번씩 P 지점을 통과한다.  
따라서  $70 \div 6 = 11 \cdots 4$ 이므로 11번 통과한다.



25. 자연수  $x, y$  에 대하여  $x, y$  의 최대공약수는  $(x, y)$  , 최소공배수는  $[x, y]$  로 나타내기로 한다.  $(a, b, c) = 7$  ,  $(a, b) = 14$  ,  $[a, b] = 84$  ,  $(b, c) = 21$  ,  $[b, c] = 126$  일 때,  $[a, b, c]$  를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 252

해설

$(a, b, c) = 7 \rightarrow a, b, c$  는 인수 7 을 가진다.  
 $(a, b) = 14 \rightarrow a, b$  는 인수 2, 7 을 가진다.  
 $(b, c) = 21 \rightarrow b, c$  는 인수 3, 7 을 가진다.  
 $\rightarrow b$  는 인수 2, 3, 7 을 가진다.  
 $[b, c] = 126 \rightarrow b$  의 인수 2 의 지수는 1 이다.  
 $[a, b] = 84 \rightarrow a = 2^2 \times 7$  ,  $b = 2 \times 3 \times 7$  ,  
 $(b, c) = 21$  ,  $[b, c] = 126 \rightarrow c = 3^2 \times 7$   
 $\therefore [a, b, c] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$