1. 다음 중 옳은 것은?

① 6 과 21 은 서로소이다.

② 3, 5, 7, 9 는 소수이다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 서로 다른 두 소수는 서로소이다.

⑤ 20 의 소인수는 3 개이다.

해설

① 6 과 21 의 최대공약수가 3 이므로 서로소가 아니다.
② $9 = 3^2$ 이므로 소수가 아니다.
③ 가장 작은 소수는 2 이다.
⑤ $20 = 2^2 \times 5$ 이므로 소인수는 2 개이다.

2. 200 과 $2^2 \times x$ 의 최대공약수가 20 일 때, x 의 최솟값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$200 = 2^3 \times 5^2$ 이고 $20 = 2^2 \times 5$ 이므로
$x = 5$

3. 최대공약수가 $3^2 \times x$ 인 두 자연수의 공약수가 12 개일 때, x 의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

공약수, 즉 최대공약수의 약수가 12 개이므로
최대공약수는 $a \times b^5$, $a^2 \times b^3$ (단, a, b 는 소수, $a \neq b$) 또는 a^{11} 꼴이어야 한다.
하지만 $3^2 \times x$ 꼴이므로 $3^2 \times b^3$ (단, b 는 소수, $b \neq 3$) 꼴이어야 하고, x 는 한 자리의 자연수 이므로 $b = 2$ 이다.
따라서 $x = 2^3 = 8$ 이다.

4. 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 2×3^2 일 때, a, b 의 공약수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6개

해설

a, b 의 공약수는 최대공약수 $2\times3^2=18$ 의 약수와 같으므로

(a, b의 공약수의 개수)

= (18의 약수의 개수)

= (2×3^2의 약수의 개수)

$=(1+1)\times(2+1)$

= 6(개)

5. 두 수 $2\times3\times5^{\square}, 2\times3^2\times5\times7^2$ 의 최소공배수가 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^2\times7^{\square}$ 일 때, ㅁ안에 알맞은 숫자들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2\times3\times5^{\square}, 2\times3^2\times5\times7^2$ 의 최소공배수를 구하면 $2\times3^2\times5^{\square}\times7^2$ 이다.
또, $2\times3\times5^{\square}, 2\times3^2\times5\times7^2$ 의 최소공배수가 $2^{\square}\times3^{\square}\times5^2\times7^{\square}$ 이므로 위에서 구한 최소공배수와 비교해 보면 $2\times3^2\times5^2\times7^2$ 이다.
따라서 $\square$ 안에 들어가는 수는 차례대로 2, 1, 2, 2 이고, 구하는 값은 8 이다.

6. 61 을 나누면 5 가 남고 165 를 나누면 3 이 부족한 수가 아닌 것은?

① 4 ② 7 ③ 14 ④ 28 ⑤ 56

해설

56 과 168 의 최대공약수는 56
56 약수 중 나머지 5 보다 큰 수들은
7, 8, 14, 28, 56 이다.

7. 어떤 공장의 한 기계에 세 톱니바퀴 A, B, C 가 서로 맞물려 있다. 톱니바퀴 A, B, C 의 톱니 수는 각각 24, 18, 36 개이다. 이때, 세 톱니바퀴가 회전하여 다시 원위치에 오는 세 톱니바퀴의 회전수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

24 와 18, 36 의 최소공배수에 처음으로 다시 맞물린다.
$24 = 2^3 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $36 = 2^2 \times 3^2$
최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$
톱니바퀴 A 는 $72 \div 24 = 3$(바퀴) $= a$
톱니바퀴 B 는 $72 \div 18 = 4$(바퀴) $= b$
톱니바퀴 C 는 $72 \div 36 = 2$(바퀴) $= c$ 이다.
$\therefore\ a+b+c = 3+4+2 = 9$

8. 가로의 길이와 세로의 길이, 높이가 각각 4cm, 12cm, 8cm 인 직육면체 모양의 나무토막이 여러 개 있다. 이것을 빈틈없이 쌓아서 될 수 있는 대로 가장 작은 정육면체 모양을 만들려고 할 때, 필요한 나무토막의 개수는?

① 24 개 ② 36 개 ③ 48 개 ④ 60 개 ⑤ 72 개

해설

4, 12, 8 의 최소공배수는 24 이므로
(필요한 나무토막의 개수)
$= (24 \div 4) \times (24 \div 12) \times (24 \div 8)$
$= 6 \times 2 \times 3 = 36$(개)

9. 어떤 자연수를 $5, 6, 8$ 로 나누면 모두 2 가 남는다고 한다. 이러한 수 중에서 가장 작은 수는?

① 120 ② 121 ③ 122 ④ 123 ⑤ 125

해설

어떤 자연수를 x 라 하면 $x - 2$ 는 $5, 6, 8$ 의 공배수이다.
$5, 6, 8$ 의 최소공배수는 120 이므로 $x - 2$ 는 $120, 240, 360, \cdots$ 이다.
$x = 122, 242, 362, \cdots$ 그러므로 가장 작은 수는 122

10. 두 자연수 $A,\ B$ 에서 $A \times B$ 의 값이 1440 이고, 최대공약수가 12 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수의 합은?

① 11　　② 36　　③ 72　　④ 84　　⑤ 108

해설

최소공배수를 L 이라 하면 $1440 = 12 \times L$ 이므로 $L = 120$

$$\begin{array}{r|ll} 12 & A & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

$12 \times a \times b = 120$

$a \times b = 10$ (단, $a,\ b$ 는 서로소)

$A = 12 \times a,\ B = 12 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$a = 10,\ b = 1$ 또는 $a = 5,\ b = 2$

(i) $a = 10,\ b = 1$ 일 때

$A - B = 10 \times 12 - 1 \times 12 = 108$

(ii) $a = 5,\ b = 2$ 일 때

$A - B = 5 \times 12 - 2 \times 12 = 36$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 60, 24 이다.

11. $\frac{12}{n}$, $\frac{56}{n}$, $\frac{32}{n}$ 를 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하면?

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

해설

n 은 12, 56, 32 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로
12, 56, 32 의 최대공약수는 4 이다.
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.
따라서 8 이다.

12. 어떤 자연수 A 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 또 어떤 분수 $\frac{A}{B}$ 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과 역시 모두 자연수가 되었다. 가능한 수 중 가장 작은 A , 가장 큰 B 를 구하여 $A+B$ 를 계산하여라.

① 23　　② 25　　③ 27　　④ 33　　⑤ 35

해설

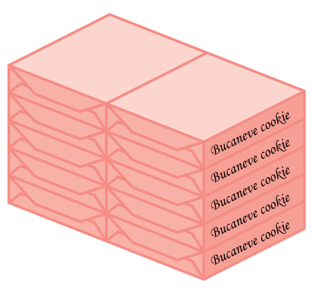
자연수 A 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분모인 6, 9 의 공배수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 작은 자연수는 6 과 9 의 최소공배수인 18 이다.
분수 $\frac{A}{B}$ 에서 B 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분자인 25, 70 의 공약수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 큰 자연수는 25 와 70 의 최대공약수인 5 이다.
$A=18,\ B=5$ 이므로
$A+B=23$ 이다.

13. 다음 중 서로소인 것은?

① $(14, 21)$ ② $(36, 72)$ ③ $(8, 90)$
④ $(11, 121)$ ⑤ $(9, 19)$

해설
서로소는 최대공약수가 1 인 두 자연수를 말하므로 $(9, 19)$ 이다.

14. 과자 상자 105개를 진열대 위에 직육면체 모양으로 최대한 높게 쌓으려고 한다. 맨 아랫줄에 상자를 가로와 세로로 각각 몇 개씩 놓으면 정확하게 직육면체 모양으로 쌓을 수 있는지 구하여라. (단, 가로, 세로, 높이에 과자 상자를 2개 이상 놓는다.)



▶ 답: ______ 개

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

▷ 정답: 5개

해설

가로, 세로, 높이에 105의 약수개만큼 놓으면 상자를 직육면체 모양으로 쌓을 수 있다.
$105 = 3 \times 5 \times 7$에서 최대한 높게 쌓으려고 하므로 높이를 7개로 쌓으면 가로와 세로에는 3개, 5개 또는 5개, 3개만큼 놓을 수 있다.

15. 18과 a의 공약수가 1, 2, 3, 6일 때, a 가 될 수 있는 50 보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가?

① 4 개　② 5 개　③ 6 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

18 과 a 의 최대공약수가 6 이므로
$18 = 6 \times 3$, $a = 6 \times k$
k 는 3 의 배수이면 안 된다.
따라서 50 보다 작은 자연수 a 는
$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$, $6 \times 7 = 42$,
$6 \times 8 = 48$ 의 6 개이다.

16. 두 자연수 $a,\ b$ 의 합은 216 이고 최대공약수는 18 이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11340

해설

$a = 18 \times n,\ b = 18 \times m$ 이라 둘 수 있다.
$a + b = 18 \times (n + m) = 216$
$\rightarrow n + m = 12$
따라서 $(n,\ m)$ 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3), (10, 2), (11, 1)$ 이다.
그런데 $ab = 18 \times 18 \times n \times m$ 이므로 ab 의 최댓값은 $(n,\ m) = (5,\ 7)$ 또는 $(7,\ 5)$ 일 때이다.
$\therefore\ ab$ 의 최댓값$= 11340$

17. 300 이하의 자연수 중 12의 배수와 15의 배수를 제외한 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 40

해설

300 이하의 자연수 중 12의 배수의 개수는 25개, 15의 배수의 개수는 20개, 12와 15의 공배수의 개수는 5개이다. 따라서 $300 - 25 - 20 + 5 = 260$이다.

18. 600을 자연수 a로 나누면 b^2이 된다고 할 때, 가능한 $\frac{a}{b}$의 값 중 두 번째로 큰 값은? (단, b는 자연수)

① $\frac{1}{2}$ ② 600 ③ 300 ④ 150 ⑤ 75

해설

$\frac{600}{a} = \frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{a}$가 제곱수이어야 하므로

$a = 2 \times 3 \times p^2$($p$는 자연수)꼴의 600의 약수이다.

$a = 2 \times 3 \times 1^2 = 6$일 때,

$\frac{600}{6} = 100 = 10^2 \quad \therefore b = 10$

$a = 2 \times 3 \times 2^2 = 24$일 때,

$\frac{600}{24} = 25 = 5^2 \quad \therefore b = 5$

$a = 2 \times 3 \times 5^2 = 150$일 때,

$\frac{600}{150} = 4 = 2^2 \quad \therefore b = 2$

$a = 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$일 때,

$\frac{600}{600} = 1^2 \quad \therefore b = 1$

$\frac{6}{10} < \frac{24}{5} < \frac{150}{2} < 600$이므로

$\frac{a}{b}$의 값 중 두 번째로 큰 값은 $\frac{150}{2} = 75$

19. 세 자연수의 비가 $3:6:10$ 이고 최소공배수가 360 일 때, 나눗셈을 이용하여 세 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 72

▷ 정답 : 120

해설

세 자연수의 비가 $3:6:10$ 이므로 원래의 세 자연수를 $3\times a, 6\times a, 10\times a$ 라고 하면

$$\begin{array}{r|rrr} a & 3\times a & 6\times a & 10\times a \\ \hline 2 & 3 & 6 & 10 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

최소공배수는 $a\times2\times3\times5=30\times a$ 이다.
세 수의 최소공배수가 360 이므로 $30\times a=360$ 이고, a 는 12 이다.
따라서 세 자연수는 $3\times12=36, 6\times12=72, 10\times12=120$ 이다.

20. 어떤 학교에 남자 260 명, 여자 273 명의 신입생이 들어왔다고 한다. 반별 인원수가 같고 각 반에 속한 남녀의 비가 같도록 반을 나누려고 할 때, 최대 몇 반까지 나오는가?

① 14반 ② 13반 ③ 12반 ④ 11반 ⑤ 10반

해설

짤 수 있는 반의 수를 x 라 할 때,
$260 = x \times \square,\ 273 = x \times \triangle$
x는 260 과 273 의 최대공약수
$260 = 2^2 \times 5 \times 13,\ 273 = 3 \times 7 \times 13$
$\therefore x = 13$

21. 화장실 바닥의 가로와 세로의 길이가 각각 300 cm, 270 cm인 화장실 벽의 적당한 높이에 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 띠처럼 둘러 붙이려고 한다. 타일을 쪼개지 않고 붙이려고 할 때, 가능한 타일의 한 변의 길이가 <u>아닌</u> 것은?

① 1 cm　② 2 cm　③ 4 cm　④ 5 cm　⑤ 10 cm

해설

타일의 한 변의 길이가 300과 270의 공약수이면 타일을 쪼개지 않고 붙일 수 있다.
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, $270 = 2 \times 3^3 \times 5$이므로
두 수의 최대공약수는 $2 \times 3 \times 5 = 30$이다.
따라서 타일의 한 변의 길이는 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm, 15 cm, 30 cm가 가능하다.

22. 동북이는 학교 운동장 한 편에 있는 농구 코트 주변에 철망을 설치하여 안전하게 농구를 하고자 한다. 철망은 가로의 길이가 $24\,\mathrm{m}$, 세로의 길이가 $64\,\mathrm{m}$ 인 농구 코트 주변에 일정한 간격으로 기둥을 고정시키고, ‘ㄷ’자 형으로 망을 설치하고자 한다. 기둥은 처음 시작되는 지점과 끝나는 지점 그리고 모서리에는 반드시 고정시키고, 가능한 한 적게 사용하려고 한다면 모두 몇 개의 기둥이 필요하겠는가?

① 12 개 ② 13 개 ③ 14 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

기둥 사이의 간격을 x 라 할 때,

$24 = x \times \square,\ 64 = x \times \triangle$

x 는 24와 64 의 최대공약수

$24 = 2^3 \times 3,\ 64 = 2^6$

$\therefore\ x = 2^3 = 8\ (\mathrm{m})$

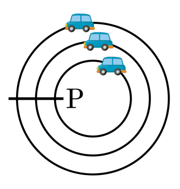
기둥 사이의 간격을 $8\,\mathrm{m}$ 라 할 때

가로 $24 = 8\ (\mathrm{m}) \times 3$ (개), 세로 $64 = 8\ (\mathrm{m}) \times 8$ (개)

직사각형 모양의 운동장의 가장자리에 ‘ㄷ’자 형으로 망을 설치할 때 필요한 기둥의 수는

$\therefore\ (2 \times 3) + 8 + 1 = 15$(개)

23. 장난감 자동차 세 대가 다음 그림과 같은 원을 따라 각각의 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있다. 18분 동안 A 자동차는 24바퀴를 돌고, B 자동차는 36바퀴, C 자동차는 45바퀴를 돈다. 세 자동차가 동시에 P 지점에서 출발하여 1시간 10분 동안 일정한 속도로 돌았다면 동시에 P 지점을 몇 번 통과하는가?



① 9번 ② 10번 ③ 11번 ④ 12번 ⑤ 13번

해설

A, B, C 세 자동차가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은 $\frac{18}{24}$분, $\frac{18}{36}$분, $\frac{18}{45}$분이다.

$\frac{18}{24}$분 $= 45$초 , $\frac{18}{36}$분 $= 30$초, $\frac{18}{45}$분 $= 24$초이다.

45, 30, 24의 최소공배수는 360이므로

360초 $= 6$분마다 한 번씩 P 지점을 통과한다.

따라서 $70 \div 6 = 11 \cdots 4$이므로 11번 통과한다.

24. 자연수 x, y 에 대하여 x, y 의 최대공약수는 (x, y) , 최소공배수는 $[x, y]$ 로 나타내기로 한다. $(a, b, c) = 7$, $(a, b) = 14$, $[a, b] = 84$, $(b, c) = 21$, $[b, c] = 126$ 일 때, $[a, b, c]$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 252

해설

$(a, b, c) = 7 \to a, b, c$ 는 인수 7 을 가진다.
$(a, b) = 14 \to a, b$ 는 인수 2, 7 을 가진다.
$(b, c) = 21 \to b, c$ 는 인수 3, 7 을 가진다.
$\to b$ 는 인수 2, 3, 7 을 가진다.
$[b, c] = 126 \to b$ 의 인수 2 의 지수는 1 이다.
$[a, b] = 84 \to a = 2^2 \times 7$, $b = 2 \times 3 \times 7$,
$(b, c) = 21$, $[b, c] = 126 \to c = 3^2 \times 7$
$\therefore [a, b, c] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$

25. 50 보다 큰 두 자리의 자연수 A 와 21 의 최대공약수가 7 이다. 이러한 자연수 A 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 5 개

해설

$50 < A < 99$ 이고 7 의 배수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 7 & A & 21 \\ \hline & a & 3 \end{array}$$

그런데, a 는 3 의 배수가 되면 안되므로

A 는 50 보다 큰 7 의 배수 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98 중 3 의 배수를 제외하면 5 개이다.

$\therefore$ 5 개