1. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의
넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
$b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근),
$b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로
(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로
함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고
그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은
$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히
많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

2. $2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$($a$, b는 유리수) 일 때, $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2+\sqrt{3}=\sqrt{a+b\sqrt{3}}$
양변을 제곱하면
$4+3+4\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$
$\therefore\ a=7,\ b=4\quad\therefore\ a-b=7-4=3$

3. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

4. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+12)$를 만족시키고 $f(1) = 3$일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(13) = f(1+12) = f(1)$
$f(25) = f(13+12) = f(13) = f(1)$
$f(37) = f(25+12) = f(25) = f(1)$
따라서 준식은 $f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$

5. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f가 $f(1) = -2,\ f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

①$f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

②$f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤$f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \cdots\cdots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기> 에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.

ㄴ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.

ㄷ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$

ㄴ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$

그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$

ㄷ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

7. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$
$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$
$f^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $f(k) = -2k + 3 = 5$
$\therefore k = -1$
$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$
$f^{-1}(-1) = l$ 로 놓으면
$f(l) = -2l + 3 = -1$
$\therefore\ l = 2$
$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(-1) = l = 2$

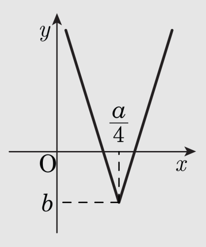
8. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \quad \therefore\ a + b = 10$

9. $x^2-6x+1=0$일 때, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$x^2-6x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누어 정리하면

$x+\dfrac{1}{x}=6$

$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t$라 하면 $t^2=x+\dfrac{1}{x}+2$

$\therefore\ t=\pm 2\sqrt{2}$

그런데 $\sqrt{x}>0,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$이므로

$t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$

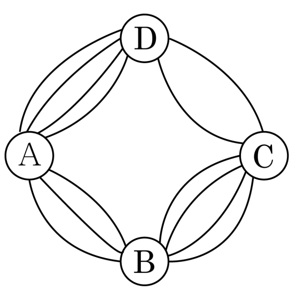
10. 180 의 양의 약수 중 3 의 배수의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

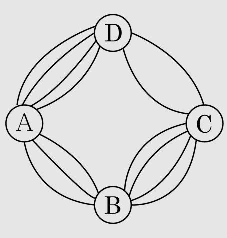
$180 = 3 \times 60$ 따라서 60 의 약수의 개수를 구하면 된다.
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로
약수의 개수 : $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

11. 4개의 도시 A, B, C, D 사이에 그림과 같은 도로가 있다. 갑, 을 두 사람이 A 에서 출발하여 B 또는D 를 통과하여 C 로 가는 방법이 수는? (단, 한 사람이 통과한 곳은 다른 사람이 통과할 수 없다.)



① 114 ② 152 ③ 192 ④ 214 ⑤ 298

해설



$A \to B \to C$ 로 가는 방법 : $3 \times 4 = 12$

$A \to D \to C$ 로 가는 방법 : $4 \times 2 = 8$

(i) 갑이 $A \to B \to C$ 로 가고,

을은 $A \to B \to C$ 로 가는 경우

$12 \times 8 = 96$

(ii) 을이 $A \to B \to C$ 로 가고,

갑은 $A \to B \to C$ 로 가는 경우

$8 \times 12 = 96$

따라서, 구하는 방법의 수는 $96 + 96 = 192$

12. 10000원짜리 지폐 3장, 5000원짜리 지폐 3장, 1000원짜리 지폐 4장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 49가지

해설

10000원짜리 1장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 2장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 9장, 1000원짜리 지폐 4장의 지불 방법의 수와 같다.

5000원짜리를 지불하는 방법의 수는

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$장의 10가지

1000원짜리를 지불하는 방법의 수는

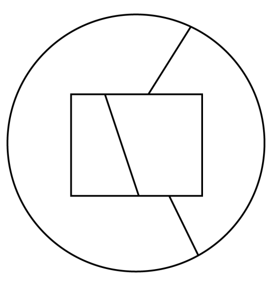
$0, 1, 2, 3, 4$장의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

이를 제외하면

$10 \cdot 5 - 1 = 49$

13. 다음그림과 같은 도형에 A, B, C, D 네 가지 색깔을 칠하려고 한다. 같은 색은 두 번 이상 칠해도 되지만 서로 이웃한 면에는 다른 색을 칠해야 한다고 할 때, 가능한 방법의 수는?

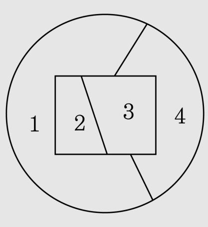


① 36　　② 48　　③ 60　　④ 72　　⑤ 84

해설

다음그림과 같이 나누어진 영역을 $1, 2, 3, 4$ 라고 하면 각 영역에 칠할 수 있는 색의 경우의 수는

1	2	3	4
↓	↓	↓	↓
4가지	3가지	2가지	2가지



$\therefore 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

14. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i $(1 \le i \le 4)$ 라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 9 가지

15. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지 ② 120 가지 ③ 180 가지
④ 240 가지 ⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 가지이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지)이다.

16. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 에서 서로 다른 세 가지 숫자를 사용하여 만든 세 자리의 자연수 중 5 의 배수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

(i) 1 의 자리가 0 인 경우 : 100 의 자리에 1, 2, 3, 4, 5 의 5 가지가 올 수 있고, 10 의 자 리에는 100 의 자리의 수를 제외한 4 가지가 올 수 있다.

$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(가지)

(ii) 1 의 자리가 5 인 경우 : 100 의 자리에 1, 2, 3, 4 의 4 가지가 올 수 있고, 10 의 자리 에는 100 의 자리의 수를 제외한 3 가지와 0 의 4 가지가 올 수 있다.

$\therefore\ 4 \times 4 = 16$(가지)

(i), (ii) 에서 $20 + 16 = 36$(개)

17. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36 ② 72 ③ 144 ④ 288 ⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$

18. 7 명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2 명, 빨래 도우미 2 명, 식사 도우미 3 명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는?

① 105　② 210　③ 315　④ 420　⑤ 630

해설

청소도우미 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_2$
빨래도우미 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2$
식사도우미 3 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_3$ 이므로
${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 210$

19. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 11

해설

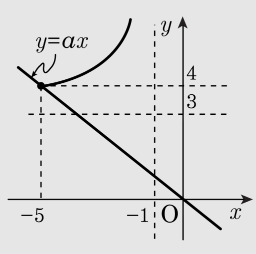
$f(x) = x - 1$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$
$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x-2) = (x-2) - 1 = x - 3$
$\vdots$
$\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x) = x - 10$
밑줄 그은 부분은 10개.
따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

20. $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 항상 성립하기 위한 실수 a의 최솟값은?

① -2 ② $-\dfrac{7}{5}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{4}{5}$ ⑤ $-\dfrac{2}{5}$

해설

$-5 \le x < -1$에서 직선 $y = ax$가 함수 $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.



$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(x+1)-4}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3$$

$y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프가 다음 그림과 같고,

$x = -5$일 때 $y = 4$이므로 점 $(-5,\ 4)$를 지난다.

직선 $y = ax$가 점$(-5,\ 4)$를 지날 때,

$4 = -5a$에서 $a = -\dfrac{4}{5}$이다.

따라서 $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 성립하려면

$a \ge -\dfrac{4}{5}$이어야 하므로

a의 최솟값은 $-\dfrac{4}{5}$이다.

21. A, B 두 사람이 놀이공원에서 'Big3' 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한 번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, A, B 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

① 840 ② 2520 ③ 3600

④ 7200 ⑤ 14400

해설

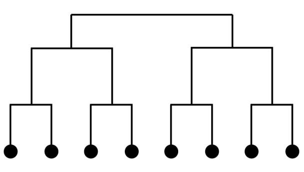
10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개를 택하는 경우의 수는

$$_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$

따라서, A, B 두 사람이 이용할 수 있는 경우는 각각 120 가지이므로 구하는경우의 수는

$120 \times 120 = 14400$

22. 세계 피파 랭킹 1 위에서 8 위까지의 총 8 개 나라가 참가한 축구 경기에서 그림과 같은 토너먼트로대진표를 만든다고 한다. 두 나라가 경기를 하면 랭킹이 높은 나라가 반드시 이긴다고 할 때, 랭킹4 위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수는?



① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 42

해설

4 명씩 두 조로 나누어 생각해보면 결승전에 나가려면 1 ~ 3 위 팀과는 같은 조에 들어가면 안된다. 두 조는 구별이 되지 않으므로 5 ~ 8 위 팀중 한 팀을 골라 1 ~ 3 위 팀 조에 넣으면 두 조가 완성이 된다. $\Rightarrow {}_4C_1 = 4$

이제 각 조 내에서 배열하는 방법 수는

$\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3 \therefore 4 \times 3 \times 3 = 36$

23. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(i) i $\neq j$ 일 때 $f(\text{i}) \neq f(j)$, (ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$

$\rightarrow (a-1)(a-4) = 0$

$\therefore a = 1,\ 4$

$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$

$\rightarrow (b-1)(b-4) = 0$

$\therefore b = 1,\ 4$

$\therefore a = 1,\ b = 4\ (\because\ 0 < a < b)$

$\therefore\ a + b = 5$

24. 점근선이 $x = 4$, $y = -1$이고, 점 $(6, 0)$을 지나는 유리함수 $f(x)$의 $-2 \leq x \leq 2$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

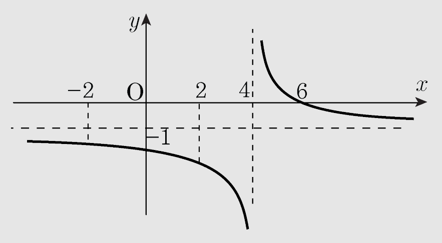
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$y = \dfrac{k}{x-4} - 1, \ (k \neq 0)$

$0 = \dfrac{k}{6-4} - 1 \ \therefore \ k = 2$

$f(x) = \dfrac{2}{x-4} - 1$



$x = -2$일 때, $M = \dfrac{2}{-2-4} - 1 = -\dfrac{4}{3}$

$x = 2$일 때, $m = \dfrac{2}{2-4} - 1 = -2$

$\therefore \ Mm = -\dfrac{4}{3} \times (-2) = \dfrac{8}{3}$

25. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 일 때, $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ 의 값은?

① $-1+\sqrt{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$

④ 1 ⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 의 양변을 제곱하면

$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 4$

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 이므로

$x+2=4$

$\therefore\ x=2$

$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ 의 값을 a라 하면

$\frac{1}{2+a} = a,\ a(2+a)=1$, $a^2+2a-1=0$

$\therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$

$0<a<1$ 이므로 $a=-1+\sqrt{2}$