

1. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉣, ㉤

해설

- ㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r 는 오직 하나의 넓이 πr^2 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
- ㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
- ㉤ 특정한 실수 a 를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\dots$ 등 무수히 많다. 즉, 실수 a 에 a 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다. 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

2. $2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$ (a, b 는 유리수) 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$$

양변을 제곱하면

$$4 + 3 + 4\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 7, b = 4 \quad \therefore a - b = 7 - 4 = 3$$

3. $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축으로 m 만큼 y 축으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$ 과 일치한다. $n - m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$$y = \sqrt{2x} \text{를 } x\text{축으로 } -3\text{만큼}$$

y 축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.

$$\text{따라서 } m = -3, n = -2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore n - m = 1$$

4. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x + 12)$ 를 만족시키고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(13) = f(1 + 12) = f(1)$$

$$f(25) = f(13 + 12) = f(13) = f(1)$$

$$f(37) = f(25 + 12) = f(25) = f(1)$$

$$\text{따라서 준식은 } f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$$

5. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.

㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.

㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$

㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$

그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$

㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$

그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

7. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$$

$$f^{-1}(5) = k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$$

$$f^{-1}(-1) = l \text{ 로 놓으면}$$

$$f(l) = -2l + 3 = -1$$

$$\therefore l = 2$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(-1) = l = 2$$

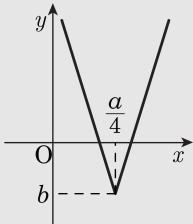
8. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

9. $x^2 - 6x + 1 = 0$ 일 때, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$x^2 - 6x + 1 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누어 정리하면

$$x + \frac{1}{x} = 6$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = t \text{ 라 하면 } t^2 = x + \frac{1}{x} + 2$$

$$\therefore t = \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $\sqrt{x} > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ 이므로

$$t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}$$

10. 180 의 양의 약수 중 3 의 배수의 개수는?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

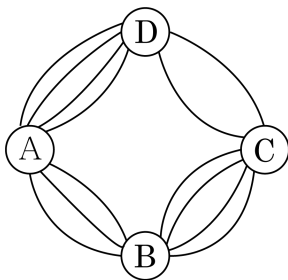
해설

$180 = 3 \times 60$ 따라서 60 의 약수의 개수를 구하면 된다.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로

약수의 개수 : $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$

11. 4개의 도시 A, B, C, D 사이에 그림과 같은 도로가 있다. 갑, 을 두 사람이 A 에서 출발하여 B 또는 D 를 통과하여 C 로 가는 방법이 수는? (단, 한 사람이 통과한 곳은 다른 사람이 통과할 수 없다.)



① 114

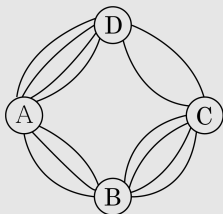
② 152

③ 192

④ 214

⑤ 298

해설



$A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 방법 : $3 \times 4 = 12$

$A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 방법 : $4 \times 2 = 8$

(i) 갑이 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가고,

을은 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우

$$12 \times 8 = 96$$

(ii) 을이 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가고,

갑은 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우

$$8 \times 12 = 96$$

따라서, 구하는 방법의 수는 $96 + 96 = 192$

12. 10000 원짜리 지폐 3장, 5000 원짜리 지폐 3장, 1000 원짜리 지폐 4장이 있다. 이 지폐의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수를 구하여라.



답 :

가지



정답 : 49 가지

해설

10000 원짜리 1장으로 지불하는 금액과 5000 원짜리 2장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000 원짜리 지폐 3장을 5000 원짜리 지폐 6장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000 원짜리 지폐 9장, 1000 원짜리 지폐 4장의 지불 방법의 수와 같다.

5000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9장의 10가지

1000 원짜리를 지불하는 방법의 수는

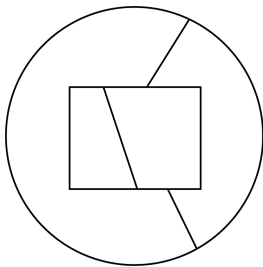
0, 1, 2, 3, 4장의 5가지

이때, 지불하지 않는 경우가 1가지이므로

이를 제외하면

$$10 \cdot 5 - 1 = 49$$

13. 다음그림과 같은 도형에 A, B, C, D 네 가지 색깔을 칠하려고 한다. 같은 색은 두 번 이상 칠해도 되지만 서로 이웃한 면에는 다른 색을 칠해야 한다고 할 때, 가능한 방법의 수는?



① 36

② 48

③ 60

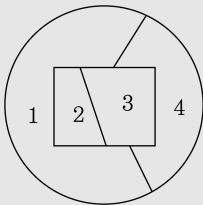
④ 72

⑤ 84

해설

다음그림과 같이 나누어진 영역을 1, 2, 3, 4 라고 하면 각 영역에 칠할 수 있는 색의 경우의 수는

1	2	3	4
↓	↓	↓	↓
4가지	3가지	2가지	2가지



$$\therefore 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

14. 1, 2, 3, 4 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i ($1 \leq i \leq 4$) 라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \neq 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: 가지

▷ 정답: 9가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3),$

$(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1),$

$(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

$\therefore 9$ 가지

15. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지

② 120 가지

③ 180 가지

④ 240 가지

⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 가지이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지) 이다.

16. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 세 가지 숫자를 사용하여 만든 세 자리의 자연수 중 5의 배수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 36 개

해설

(i) 1의 자리가 0인 경우 : 100의 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5가지가 올 수 있고, 10의 자리에는 100의 자리의 수를 제외한 4가지가 올 수 있다.

$$\therefore 5 \times 4 = 20(\text{가지})$$

(ii) 1의 자리가 5인 경우 : 100의 자리에 1, 2, 3, 4의 4가지가 올 수 있고, 10의 자리에는 100의 자리의 수를 제외한 3가지와 0의 4가지가 올 수 있다.

$$\therefore 4 \times 4 = 16(\text{가지})$$

(i), (ii)에서 $20 + 16 = 36(\text{개})$

17. silent의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

① 36

② 72

③ 144

④ 288

⑤ 432

해설

전체의 경우의 수에서 양쪽 끝 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼준다.

$$6! - {}_4P_2 \times 4! = 432$$

18. 7 명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2 명, 빨래 도우미 2 명, 식사 도우미 3 명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는?

① 105

② 210

③ 315

④ 420

⑤ 630

해설

청소도우미 2명을 뽑는 방법의 수는 7C_2

빨래도우미 2명을 뽑는 방법의 수는 5C_2

식사도우미 3명을 뽑는 방법의 수는 3C_3 이므로

$${}^7C_2 \cdot {}^5C_2 \cdot {}^3C_3 = 210$$

19. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \cdots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10

② -5

③ 1

④ 5

⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

$\vdots$

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x - 10$$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

20. $-5 \leq x < -1$ 에서 $ax \leq \frac{3x-1}{x+1}$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a 의 최솟값은?

① -2

② $-\frac{7}{5}$

③ -1

④ $-\frac{4}{5}$

⑤ $-\frac{2}{5}$

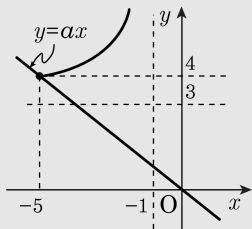
해설

$-5 \leq x < -1$ 에서 직선 $y = ax$ 가

함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-1}{x+1} \\ &= \frac{3(x+1)-4}{x+1} \\ &= \frac{-4}{x+1} + 3 \end{aligned}$$

$y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 그래프가 다음 그림과 같



고,

$x = -5$ 일 때 $y = 4$ 이므로 점 $(-5, 4)$ 를 지난다.

직선 $y = ax$ 가 점 $(-5, 4)$ 를 지날 때,

$$4 = -5a \text{에서 } a = -\frac{4}{5} \text{이다.}$$

따라서 $-5 \leq x < -1$ 에서 $ax \leq \frac{3x-1}{x+1}$ 이 성립하려면

$$a \geq -\frac{4}{5} \text{이어야 하므로}$$

a 의 최솟값은 $-\frac{4}{5}$ 이다.

21. A, B 두 사람이 놀이공원에서 'Big3' 라는 입장권을 구입하였다. 이 입장권은 10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개의 놀이기구를 한번씩만 이용할 수 있다. 놀이기구를 3 번 모두 이용한다고 할 때, A, B 두 사람이 이 입장권으로 놀이기구를 이용할 수 있는 모든 경우의 수는? (단, 놀이기구의 정원은 2 명 이상이며 이용하는 순서는 상관하지 않는다.)

① 840

② 2520

③ 3600

④ 7200

⑤ 14400

해설

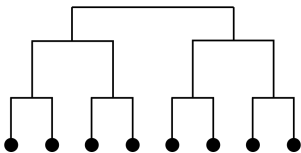
10 개의 놀이기구 중에서 서로 다른 3 개를
택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120(\text{가지})$$

따라서, A, B 두 사람이 이용할 수 있는 경우는
각각 120 가지이므로 구하는 경우의 수는

$$120 \times 120 = 14400$$

22. 세계 피파 랭킹 1위에서 8위까지의 총 8개 나라가 참가한 축구 경기에서 그림과 같은 토너먼트로 대진표를 만든다고 한다. 두 나라가 경기를 하면 랭킹이 높은 나라가 반드시 이긴다고 할 때, 랭킹 4위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수는?



① 24

② 28

③ 32

④ 36

⑤ 42

해설

4 명씩 두 조로 나누어 생각해보면 결승전에 나가려면 1 ~ 3 위 팀과는 같은 조에 들어가면 안된다. 두 조는 구별이 되지 않으므로 5 ~ 8 위 팀중 한 팀을 골라 1 ~ 3 위 팀 조에 넣으면 두 조가 완성이 된다. $\Rightarrow {}_4C_1 = 4$

이제 각 조 내에서 배열하는 방법 수는

$$\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3 \therefore 4 \times 3 \times 3 = 36$$

23. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \rightarrow \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(i) $i \neq j$ 일 때 $f(i) \neq f(j)$,

(ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i), 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \neq f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$\rightarrow (a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 1, 4$$

$$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$\rightarrow (b-1)(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 1, 4$$

$$\therefore a = 1, b = 4 (\because 0 < a < b)$$

$$\therefore a + b = 5$$

24. 점근선이 $x = 4$, $y = -1$ 이고, 점 $(6, 0)$ 을 지나는 유리함수 $f(x)$ 의 $-2 \leq x \leq 2$ 에서의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{4}{3}$

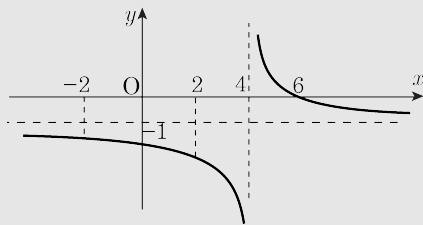
⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$$y = \frac{k}{x-4} - 1, (k \neq 0)$$

$$0 = \frac{k}{6-4} - 1 \therefore k = 2$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4} - 1$$



$$x = -2 \text{ 일 때, } M = \frac{2}{-2-4} - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } m = \frac{2}{2-4} - 1 = -2$$

$$\therefore Mm = -\frac{4}{3} \times (-2) = \frac{8}{3}$$

25. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2$ 일 때, $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}}$ 의 값

은?

① $-1 + \sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 4$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{이므로}$$

$$x + 2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \text{의 값을 } a \text{라 하면}$$

$$\frac{1}{2 + a} = a, a(2 + a) = 1, a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -1 + \sqrt{2}$$