1. 집합 $A = \{z \mid z = p(1-i) + q(1+i)\}$ 에 대하여 다음 중 집합 A 의 원소인 것은? (단, p, q 는 양의 실수)

① $-4-2i$　② $-3+i$　③ $-2+i$
④ $2+3i$　⑤ $5-2i$

해설

$z = p(1-i) + q(1+i)$ 에서 $z = p+q+(-p+q)i$

① $p+q=-4$, $-p+q=-2$ 이므로
$p=-1,\ q=-3$
$\therefore\ -4-2i \notin A$

② $p+q=-3$, $-p+q=1$ 이므로
$p=-2,\ q=-1$
$\therefore -3+i \notin A$

③ $p+q=-2$, $-p+q=1$ 이므로
$p=-\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$
$\therefore -2+i \notin A$

④ $p+q=2$, $-p+q=3$ 이므로
$p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}$
$\therefore 2+3i \notin A$

⑤ $p+q=5$, $-p+q=-2$ 이므로
$p=\frac{7}{2},\ q=\frac{3}{2}$
$\therefore 5-2i \in A$

2. $x+y+(2x-y)i=1+5i$를 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y=1,\ 2x-y=5$
$\therefore\ x=2,\ y=-1$

3. 복소수 z 를 원소로 하는 집합 $M = \{z \mid z = (x+y) + (x-y)i,\ x,\ y$는 양의 실수 $\}$일 때, 다음 중 M 의 원소인 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-3-2i$　　② $-1+2i$　　③ $2+3i$

④ $3+4i$　　⑤ $5+2i$

해설

복소수 $z = (x+y) + (x-y)i$ 에서 $x > 0,\ y > 0$ 인 실수이므로
$x + y > 0$ 이고 $x + y > x - y$
따라서 (실수 부분)> 0, (실수 부분)>(허수 부분) 이다.
이를 만족시키는 복소수는 ⑤$5 + 2i$ 이다.

4. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

(1) $y = x^2 - 2x - 3$ $(0\ x\ 4)$
(2) $y = -x^2 + 4x$ $(1\ x\ 5)$
(3) $y = -x^2 + 2x + 8$ $(2\ x < 4)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5 , 최솟값 −4

▷ 정답 : 최댓값 4 , 최솟값 −5

▷ 정답 : 최댓값 8, 최솟값은 없다

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점 과 가장 낮은 점을 조사한다.

(1) $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$
꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$ 에서 최댓값 5 , $x = 1$ 에서 최솟값 −4

(2) $y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$
꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 4 , $x = 5$ 에서 최솟값 −5

(3) $y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9$
꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = 9$

양끝점 : $\begin{cases} x = 2 \text{ 일 때 } y = 8 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 0 \end{cases}$

$x = 2$ 에서 최댓값 8 , 최솟값은 없다.

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 2x + 8 \ (2 \le x < 4)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 8 최솟값은 없다

해설

$y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때, $y = 9$

양끝점 : $\begin{cases} x = 2 \text{ 일 때, } y = 8 \\ x = 4 \text{ 일 때, } y = 0 \end{cases}$

$2 \le x < 4$ 이므로

$x = 2$ 에서 최댓값 8 , 최솟값은 없다.

6. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4　② 7　③ 8　④ 11　⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

7. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

8. 사차방정식 $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$ ② $\sqrt{2}i$ ③ -2

④ -1 ⑤ 1

해설

(준식)$=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$
실근의 합은 $1+(-1)=0$
허근의 합은 -2
모든 근의 합은 -2

9. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

10. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

11. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

12. 다음 방정식을 만족하는 x, y의 값을 차례대로 구하여라.

$2x-y=4x+10=x+y-5$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-5$

▷ 정답 : $y=0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x-y=4x+10 \\ 2x-y=x+y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+y+10=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+5=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $x=2y-5$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y-5)+y+10=0$

$\therefore\ y=0$

$y=0$을 ㉢에 대입하면 $x=-5$

$\therefore\ x=-5,\ y=0$

13. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + ay = 10 \\ x - y = b \end{cases}$$

의 해가 $x = 2,\ y = -3$일 때, $a + b$의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$x = 2,\ y = -3$을
두 방정식
$2x + ay = 10,\ x - y = b$에 대입하면
모두 성립시키므로 $4 - 3a = 10$
$\therefore\ a = -2$
$2 - (-3) = b$
$\therefore\ b = 5$
$\therefore\ a + b = 3$

14. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$
$\therefore\ y = 2$를 ㉣ 대입하면 $x = 3$
$\therefore\ x = 3,\ y = 2$

15. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

16. $y=x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2$ 와 $y=x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4　　② 2　　③ -4　　④ -2　　⑤ 3

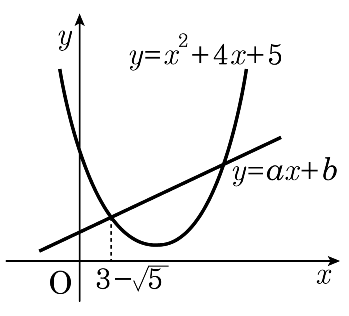
해설

$y=x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2$
$y=x$ 의 교점은 $x^2-(a^2-4a+3)x+a^2+2=x$
$x^2-(a^2-4a+4)x+a^2+2=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라면
두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{(a-2)^2}{2}=0$

$\therefore\ a=2$

17. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

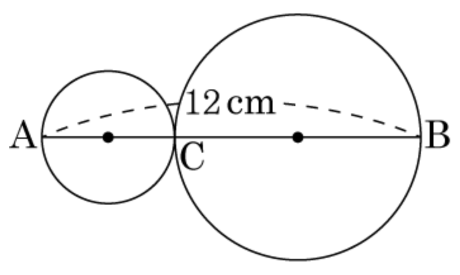


① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

18. 다음 그림과 같이 지름의 길이의 합이 $12\,\mathrm{cm}$ 인 두 원이 있다. 두 원의 넓이의 합이 최소가 되도록 하는 두 원의 반지름의 길이와 넓이의 합을 각각 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\,\mathrm{cm}$

▷ 정답 : $3\,\mathrm{cm}$

▷ 정답 : $18\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

한 원의 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$ 라 하면 다른 원의 반지름의 길이는 $(6-x)\,\mathrm{cm}$ 이다. 두 원의 넓이의 합을 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \pi x^2 + \pi(6-x)^2 \\ &= \pi(2x^2 - 12x + 36) \\ &= 2\pi(x^2 - 6x + 9) + 36\pi - 18\pi \\ &= 2\pi(x-3)^2 + 18\pi \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름 모두 $3\,\mathrm{cm}$ 이고 넓이의 합의 최솟값은 $18\pi\,\mathrm{cm}^2$ 이다.

19. 길이가 $100\,\mathrm{m}$ 인 철사를 구부려서 만든 부채꼴이 있다. 부채꼴의 반지름의 길이를 x 라고 할 때, 넓이가 최대가 되는 호의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 50

해설

부채꼴의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2} \times x \times (100 - 2x) &= x(50 - x) \\ &= -x^2 + 50x \\ &= -(x^2 - 50x + 625 - 625) \\ &= -(x - 25)^2 + 625 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점 $(25, 625)$ 에서 $x = 25$ 이므로 호의 길이는 $100 - 2x = 100 - 50 = 50$ 이다.

20. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2 + 10a$$
$$= -(a^2 - 10a + 25) + 25$$
$$= -(a-5)^2 + 25$$

$a = 5,\ b = 25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

21. 삼차방정식 $2x^3 + px^2 + qx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1-2i$ 일 때 $p+q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7　　② -7　　③ 6　　④ -6　　⑤ 11

해설

한 근이 $1-2i$이므로 다른 두 근을 $1+2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱:

$(1-2i)(1+2i)\alpha = \frac{5}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}$

세 근의 합: $-\frac{p}{2} = (1-2i) + (1+2i) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore\ p = -5$

두근끼리 곱의 합 : $\frac{q}{2} = (1-2i)(1+2i) + (1-2i+1+2i)\cdot\frac{1}{2} = 6$

$\therefore\ q = 12$

$\therefore\ p+q = 7$

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 한 근은 $1+2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

나머지 일차식을 $2x+a$ 라고 하면

$2x^3 + px^2 + qx - 5 = (2x+a)(x^2-2x+5)$ 에서

$a = -1$ 이므로 대입하여 정리하면

$p = -5,\ q = 12$

$\therefore\ p+q = 7$

22. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

23. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 근을 $1-i, 1+i, \gamma$ 라 하면
$(1-i)(1+i)\gamma=4$, $2\gamma=4$, $\gamma=2$
$a=-(1-i+1+i+2)=-4$
$b=(1-i)(1+i)+(1+i)2+2(1-i)=6$
$\therefore\ a+b=2$

24. 복소수 z 에 대하여 $3z+\bar{z}(1+i)=3-i$ 가 성립할 때, $z\bar{z}$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
이것을 주어진 식에 대입하면
$3(a+bi)+(a-bi)(1+i)=3-i$
$3a+3bi+a+ai-bi+b=3-i$
$(4a+b)+(a+2b)i=3-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a+b=3$, $a+2b=-1$

$\begin{cases} 4a+b=3 & \cdots ㉠ \\ a+2b=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠ $\times 2-$ ㉡ 을 하면 $7a=7$,
$\therefore\ a=1$
$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$ 이므로 $z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$

25. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x + y$

④ $x - y$　　⑤ $2x + y$

해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x\end{aligned}$$

26. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\frac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면,

$z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.
$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

27. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

28. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0, \ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0, \ (x - 1)(x - 3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1 개이다.

29. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로
$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\frac{1}{2}$
그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$
$\therefore -1 \le x < 0$

30. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

31. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ 0　　⑤ 3

해설

$x^2+(a+1)x+a+1=0$이 실근을 가지므로
$D=(a+1)^2-4(a+1)\geq 0,\ \ (a+1)(a-3)\geq 0$
$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$
한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-(a+1),\ \alpha\beta=a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\ &= (a+1)^2-(a+1)\\ &= a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$ 이므로
$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 는 $a=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

32. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

▷ 정답 : 2

해설

두 수를 각각 $x,\ x+4$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x^2+(x+4)^2 \\ &= 2x^2+8x+16 \\ &= 2(x+2)^2+8 \end{aligned}$$

$x=-2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x=-2,\ x+4=2$

따라서 구하는 두 수는 $-2,\ 2$

33. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

① $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
② $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
③ $x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
④ $x = \dfrac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을
x^2 으로 나누면

$x^2 + 8x + 17 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 17 = 0$

$\therefore x + \dfrac{1}{x} = A$ 라 하자.

$A^2 + 8A + 15 = (A+3)(A+5)$

$= \left(x + \dfrac{1}{x} + 3\right)\left(x + \dfrac{1}{x} + 5\right) = 0$

$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$

$\therefore x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

34. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

35. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$