1. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

ⅰ) $x<3$ 일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ⅱ) $3\le x<4$ 일 때
$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$
$\therefore$ 해가 없다.
ⅲ) $x\ge 4$ 일 때
$x-3+x-4=2,\ 2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\text{ 가 })$$
$$\leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\text{ 나 })}{4a^2}$$
$$\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\text{ 다 })}{2a}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
② $\frac{b}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
③ $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
④ $\frac{b^2}{4a^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
⑤ $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　② $1+\sqrt{2}$　③ $1+\sqrt{3}$
④ $\sqrt{5}-1$　⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설
(ⅰ) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ⅱ) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2 + (a+2i)x + b + 4i = 0$ (a, b 는 실수)의 두 근이 같을 때, $a+b$ 의 값은?

① -5　② 5　③ -7　④ 7　⑤ 9

해설

$x^2 + (a+2i)x + b + 4i = 0$의 두 근이 같으므로
$D = (a+2i)^2 - 4(b+4i) = 0$
$\therefore\ (a^2 - 4b - 4) + 4(a-4)i = 0$
$a,\ b$ 는 실수이므로 복소수의 상등에 관한 정의에 따라
$a^2 - 4b - 4 = 0,\quad 4(a-4) = 0$
연립하여 풀면,
$a = 4,\ b = 3 \quad \therefore\ a+b = 7$

5. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8} = 2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4 = p^2+8p+16-4q+8,\ 4q = p^2+8p+20$

$q = \dfrac{1}{4}p^2+2p+5 = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta = p+4, \alpha\beta = q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = 2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)} = 2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2) = 4$

q에 대해 정리하면

$q = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

6. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$

$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\left\{3(k-1)\right\}^2-(k-2)(9k+1)>0$

$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$

$-k+11>0$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

7. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② −2 ③ 3 ④ −4 ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$

$M = k^2 + 4k$ 이므로

$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

8. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: ______ 초 후

▷ 정답: 4초 후

해설

$y = 40x - 5x^2$
$y = -5(x - 4)^2 + 80$
$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

9. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0,\ (t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

10. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
∴ ①이 조건에 맞다

11. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a + b = 70$, $1.2a + 1.25b = 86$
연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$
④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서
$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$
ⅰ) $x = y$ 일 때
$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$
$x = \pm 2,\ y = \pm 2$
ⅱ) $x = 2y$ 일 때
$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$
$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$
$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

13. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-4 \le 2 \\ 5-2x < 9 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$이다. 이때, a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$3x - 4 \le 2$
$3x \le 6$
$\therefore\ x \le 2$

$5 - 2x < 9$
$2x > -4$
$\therefore\ x > -2$

따라서 $-2 < x \le 2$ 에서 $a = -2,\ b = 2$ 이다.

14. 다음 연립부등식 $\begin{cases} 3x-3 \le x+5 \\ 2x+3 \le 0.5(6x+9) \end{cases}$ 의 해는?

① $-\frac{3}{2} \le x \le 1$ ② $-\frac{3}{2} \le x \le 4$ ③ $-\frac{1}{2} \le x \le 1$
④ $-\frac{1}{2} \le x \le 4$ ⑤ $\frac{3}{2} \le x \le 4$

해설

$i)$ $3x-3 \le x+5,\ x \le 4$
$ii)$ $2x+3 \le 0.5(6x+9)$ 의 양변에 10 을 곱하면
$20x+30 \le 5(6x+9)$, $x \ge -\frac{3}{2}$
$\therefore -\frac{3}{2} \le x \le 4$

15. $x+\frac{5}{2}\le\frac{3}{2}x+1$, $\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}(x-1)$을 만족하는 x의 값은?

① 없다. ② 2 ③ 3, 4 ④ $x<2$ ⑤ $x\ge3$

해설

$x+\frac{5}{2}\le\frac{3}{2}x+1$, $x\ge3$

$\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}(x-1)$, $x\le\frac{3}{2}$

∴ 만족하는 x는 없다.

16. 소포를 보내려고 하는데 한 상자의 제한무게가 10kg 이라고 한다. 상품 A, B, C 의 개수가 모두 합해서 26 개이고, 중량이 각각 0.5kg, 1.2kg, 0.2kg 일 때, 한 상자에 담으면 제한무게에 딱 맞게 채워진다고 한다. 상품 C 의 개수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

상품 A, B, C 의 개수를 각각 x, y, z 개라 하면

$x + y + z = 26$

$0.5x + 1.2y + 0.2z = 10$

두 식을 연립하여 x 와 y 를 각각 z 로 나타내면

$x = \frac{2(106 - 5z)}{7}$, $y = \frac{3(z - 10)}{7}$

그런데 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ 이고,

x, y, z 는 자연수이므로

$\frac{2(106 - 5z)}{7} \geq 1$, $\frac{3(z - 10)}{7} \geq 1$ 에서

z 는 $\frac{37}{3} \leq z \leq \frac{41}{2}$ 인 자연수이다.

따라서 상품 C 의 개수의 최솟값은 13 이다.

17. 다음 부등식을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

$$2|x+2|+|x-1| \leq 6$$

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

ⅰ) $x < -2$일 때
$-2(x+2)-(x-1) \leq 6$, $x \geq -3$
공통부분은 $-3 \leq x < -2$
ⅱ) $-2 \leq x < 1$일 때
$2(x+2)-(x-1) \leq 6$, $x \leq 1$
공통부분은 $-2 \leq x < 1$
ⅲ) $x \geq 1$일 때
$2(x+2)+(x-1) \leq 6$, $x \leq 1$
공통부분은 $x = 1$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)를 합하면, $-3 \leq x \leq 1$
∴ 정수 x의 개수 5 개

18. 이차부등식 $x^2-2x+m+3>0$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 m 값의 범위를 구하면?

① $m>-2$ ② $m<-2$ ③ $0<m<-2$
④ $0<m\le -2$ ⑤ $0\le m<-2$

해설
주어진 부등식이 항상 성립하려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\frac{D}{4}=1^2-(m+3)<0 \quad \Rightarrow \quad m>-2$

19. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1<x<4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1<x \le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

20. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2 < p-q < 5$　② $3 \le p-q < 5$　③ $3 < p-q \le 6$
④ $5 \le p-q \le 6$　⑤ $2 \le p-q < 6$

해설

$f(x) = x^2+x-p$, $g(x) = x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x) = x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - p \le 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - p > 0$$

$$\therefore \frac{3}{4} \le p < \frac{15}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $g(x) = x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2} - q \ge 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} - q < 0$$

$$\therefore -\frac{9}{4} < q \le -\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡ 에서 $2 \le p-q < 6$