1. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{3x^2+13x+4}$$

① $x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$

② $x \le -\frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$

③ $x \le \frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$

④ $-4 \le x \le \frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{1}{3} \le x \le 4$

해설

$3x^2+13x+4 \ge 0$

$(3x+1)(x+4) \ge 0$

$\therefore\ x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$

2. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

3. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2,\ y=-1$
② $x=-1,\ y=-2$
③ $x=2,\ y=1$
④ $x=-1,\ y=2$
⑤ $x=1,\ y=2$

해설

$$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\therefore\ x=2,\quad y=1$$

4. 함수 $y = \sqrt{2x-4}+b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq a \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq -3 \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x-4 \geq 0$ 에서 $2x \geq 4$

$\therefore \ x \geq 2$

주어진 함수의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 2 \}$ 이므로

$a = 2$

함수 $y = \sqrt{2x-4}+b$ 의 치역은 $\{ y \mid y \geq b \}$ 이므로 $b = -3$

$\therefore \ ab = -6$

5. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

6. 함수 $y = \sqrt{-2x-2} - 2$의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2} - 2 = \sqrt{-2(x+1)} - 2$의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 -2만큼
평행이동한 것이다.
$\therefore m+n = -1-2 = -3$

7. 함수 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

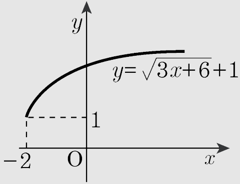
① 제 1 , 2 사분면　　② 제 1 , 3 사분면

③ 제 1 , 4 사분면　　④ 제 1 , 2 , 3 사분면

⑤ 제 1 , 3 , 4 사분면

해설

$y = \sqrt{3x+6}+1 = \sqrt{3(x+2)}+1$
주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프는 제 1 , 2 사분면을 지난다.

8. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

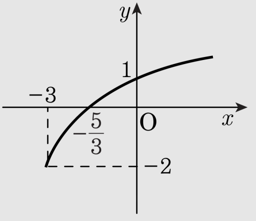
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



9. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1}+4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1}+4 = -\sqrt{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}+4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1}+4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1}+4 = 0$

$\therefore\ a-b = 2-0 = 2$

10. 두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$, $x=\sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③ $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 과 $x=\sqrt{y+1}$은
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=\sqrt{x+1}$ 과 $y=x$ 의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

11. 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이면 $a < 0,\ b < 0$
④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a|(i)^2 = -|a| = a$이므로 옳지 않다.

12. $0 < x \le 1$ 일 때, 무리식 $\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}$$
$$= \frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$

13. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-3)^2}$

$= |a+1| + |a-3| = (a+1) - (a-3) = 4$

14. $x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ 이 유리수가 되는 실수 x의 집합은?

① 정수 전체의 집합

② 유리수 전체의 집합

③ 실수 전체의 집합

④ $\sqrt{x^2+1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

⑤ $x+\sqrt{x^2+1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

해설

(주어진 식) $=x+\sqrt{x^2+1}$

$-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}$

$=x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}$

$=x+\sqrt{x^2+1}+x-\sqrt{x^2+1}=2x$

$\therefore$ $2x$ 가 유리수이려면 x 는 유리수이어야 한다.

15. $\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$의 소수 부분을 a라 할 때, $\dfrac{3a^3+7a^2-4a}{a^2+2a}$의 값을 구하면?

① $2\sqrt{3}$　② $\sqrt{3}-1$　③ -1

④ 1　⑤ 0

해설

$$\sqrt{6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{6+2(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{3}+1 = 2.\times\times\times$$

소수부분 : $a = \sqrt{3}+1-2 = \sqrt{3}-1$

$a+1 = \sqrt{3}$에서 양변을 제곱하고 정리하면

$a^2+2a-2=0$

$$\frac{3a^3+7a^2-4a}{a^2+2a} = \frac{3a^2+7a-4}{a+2}$$
$$= \frac{3(a^2+2a-2)+a+2}{a+2}$$
$$= 1(\because a^2+2a-2=0)$$

16. $x = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2 - (x-y)^2$ 의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$$x + y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$x - y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 5 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

17. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >\ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab <\ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0\ )$ 이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

18. 함수 $y=-\sqrt{6-3x}+a$ 의 그래프가 제 1 , 2 , 3 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최솟값은?

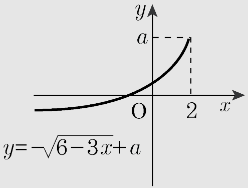
① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-\sqrt{6-3x}+a=-\sqrt{-3(x-2)}+a$

주어진 함수는 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

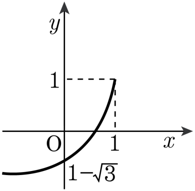
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 2 , 3 사분면을 지나려면 $x=0$ 일 때, $y>0$ 이어야 한다.



$-\sqrt{6}+a>0$ 이므로 $a>\sqrt{6}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3 이다.

19. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?

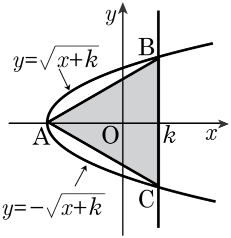


① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1 = -\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3} = -\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a = -3$
$\therefore\ y = -\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c = (-3)+3+1 = 1$

20. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = \sqrt{x+k}$, $y = -\sqrt{x+k}$의 그래프의 교점을 A, 두 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 점B, C라고 할 때, $\triangle$ABC의 넓이가 64이다. 이 때, 실수 k의 값은?



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

점 A의 좌표는 $(-k,\ 0)$이고,

$y = \sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$일 때, $y = \sqrt{2k}$

$y = -\sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$일 때, $y = -\sqrt{2k}$

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

B $(k,\ \sqrt{2k})$, C $(k,\ -\sqrt{2k})$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2k} \cdot 2k = 64$, $k\sqrt{2k} = 32$

양변을 제곱하면 $2k^3 = 32^2$, $k^3 = 512$

이 때, k는 실수이므로

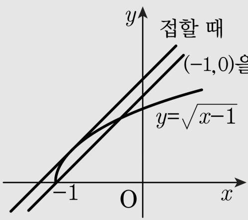
$\therefore k = 8$

21. 두 함수 $y=\sqrt{x+1}$과 $y=x+a$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le a < \frac{5}{4}$　② $1 < a < \frac{5}{4}$　③ $1 \le a \le \frac{5}{4}$

④ $2 \le a < \frac{5}{4}$　⑤ $1 \le a < 3$

해설



그림에서

(i) $y=x+a$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, $a=1$

(ii) $y=x+a$ 와 $y=\sqrt{x+1}$ 이 접할 때

$x+a=\sqrt{x+1}$ 에서 양변을 제곱하면

$(x+a)^2=x+1$

$x^2+(2a-1)x+a^2-1=0$

$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0$

$-4a+1+4=0 \Leftrightarrow 4a=5$

$\therefore a=\frac{5}{4}$

(i), (ii) $1 \le a < \frac{5}{4}$

22. $x \geq -1$ 인 실수 x에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$로 정의된 함수 f의 역함수를 f^{-1}이라고 할 때 모든 양수 t에 대하여 $\dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$를 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{t+1}$ ② $\dfrac{t}{t+1}$ ③ $\dfrac{2t-2}{t+1}$

④ $\dfrac{t-1}{t+1}$ ⑤ $\dfrac{2t}{t-1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$에서

역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 $f^{-1}(t)$로 나타내면

$y = \sqrt{x+1} \;\rightarrow\; y^2 = x+1 \;\rightarrow\; x = y^2 - 1$

$\therefore\; f^{-1}(x) = x^2 - 1 \; (x \geq 0)$

$\therefore\; f^{-1}(t) = t^2 - 1$

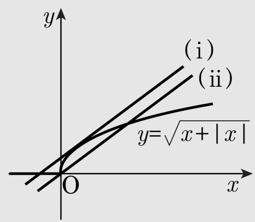
$$\therefore\; \frac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \frac{t^2-1}{(t+1)^2} = \frac{t-1}{t+1}$$

23. 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<0$　② $-1<k\le 0$　③ $0<k<\frac{1}{2}$
④ $0\le k<\frac{1}{2}$　⑤ $0<k\le\frac{1}{2}$

해설

$x\ge 0$일 때 $y=\sqrt{2x}$이고 $x<0$일 때
$y=0$이므로
$y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는
그림과 같고 직선 $y=x+k$와 서로 다른
세 점에서 만나려면
(i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.



① 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x+k$가 접할 때
$\sqrt{2x}=x+k$에서 $2x=(x+k)^2$
$x^2+2(k-1)x+k^2=0$
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{\mathrm{D}}{4}=(k-1)^2-k^2=0,\quad -2k+1=0$
$\therefore k=\frac{1}{2}$
② 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$
①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0<k<\frac{1}{2}$

24. 두 실수 x, y 가 $x+y=-1$, $xy=2$을 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ② $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

해설

$x+y=-1,\ xy=2 \Rightarrow x<0,\ y<0$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (\because\ x<0,\ y<0)$$

$$=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{x}}=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

25. $0 < a < 1$이고, $x = \dfrac{1+a^2}{a}$일 때, $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$의 값을 구하면?

① a^2　② a　③ $\dfrac{1}{a}$　④ $a-1$　⑤ $a+1$

해설

$$x+2=\frac{1+a^2}{a}+2=\frac{1}{a}(a+1)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x+2}=\frac{|a+1|}{\sqrt{a}}=\frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$$x-2=\frac{1+a^2}{a}-2=\frac{(a-1)^2}{a}$$

$$\therefore\ \sqrt{x-2}=\frac{|a-1|}{\sqrt{a}}=\frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=\frac{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}}{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{(a+1)+(1-a)}{(a+1)-(1-a)}=\frac{1}{a}$$

26. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12}$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여, x^3+y^3의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7+2\sqrt{12},\ \frac{1}{x} = \sqrt{3}+2,\ x = 2-\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7-2\sqrt{12},\ \frac{1}{y} = 2-\sqrt{3},\ y = 2+\sqrt{3}$$

$x+y=4,\ xy=1$

$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 64-12 = 52$

27. $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 7

해설

$x = \sqrt{2}+1$, $(x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$에서

$x^2 - 2x - 1 = 0$

(준식) $= (x^2-2x-1)(x^2+2)+3$

$= 0 \times (x^2+2)+3 = 3$

28. 자연수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$가 성립할 때, $x+y+z$의 값을 구하면?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$17+x\sqrt{2} = y^2+2z^2+2yz\sqrt{2}$

$\therefore\ y^2+2z^2 = 17 \cdots$ ㉠, $x = 2yz \cdots$ ㉡

㉠에서 $z=1$이면 $y=\sqrt{15}$이므로 자연수가 아니다.

$z=2$이면 $y^2=9 \quad \therefore\ y=3$

$z=3$이면 $y^2=-1<0$이므로 모순

$\therefore\ x=12,\ y=3,\ z=2$

$\therefore\ x+y+z=17$

29. 함수 $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{2-x} & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여

$(f \circ f)(k) = 2$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = 2$ 에서

$f(k) = k'$ 이라 하면 $f(k') = 2$

i) $k' \geq 0$ 이면

$y = 1 - \sqrt{x}$이고, $y \leq 1$ 이므로

함숫값이 2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k' < 0$

ii) $k' < 0$ 이므로

$f(k') = \sqrt{2 - k'} = 2$

$2 - k' = 4 \qquad \therefore\ k' = -2$

$f(k) = -2$ 인 k 의 값을 구하면 된다.

iii) $k < 0$ 이면

$y = \sqrt{2-x}\ (x < 0)$ 이고, $y > \sqrt{2}$ 이므로

함숫값이 -2 가 될 수 없다.

$\therefore\ k \geq 0$

iv) $k \geq 0$ 이므로

$f(k) = 1 - \sqrt{k} = -2$

$\therefore\ k = 9$

30. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1,\ -2)$ ② $(-3,\ -1)$

③ $(1,\ 1)$ ④ $(-2,\ -2)$

⑤ $(1,\ 1)$, $(-2,\ -2)$

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x좌표는

$f(x) = x$의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$에서

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1, -2$

$x = 1 (\because\ x \geq -1)$

$\therefore\ \mathrm{P} = (1, 1)$

31. 양수 a의 소수 부분을 b라 할 때, $a^2+b^2=8$을 만족하는 a의 값을 구하면?

① $1+\sqrt{3}$　　② $2+\sqrt{3}$　　③ $2-\sqrt{3}$

④ $1-\sqrt{3}$　　⑤ $3+2\sqrt{3}$

해설

(i) a가 정수일 때,

$b=0,\ a^2=8\ a=2\sqrt{2}$ (모순)

(ii) $a>0$, 정수가 아닐 때 $b\neq 0$

a의 정수부분을 k라 하면

$a=k+b\ (0<b<1)$이라 하면

$a^2+b^2=8$에서 $b^2=8-a^2$

$0<8-a^2<1,\ \sqrt{7}<a<\sqrt{8}$

$\therefore k=2 \qquad \therefore\ b=a-2$

$a^2+(a-2)^2=2a^2-4a+4=8$

$a^2-2a-2=0,\ a=1\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1+\sqrt{3}(\because a>0)$

32. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $3 \le k < \frac{16}{3}$ ② $3 \le k < \frac{15}{4}$ ③ $4 \le k < \frac{17}{4}$

④ $4 \le k < \frac{16}{3}$ ⑤ $4 \le k < \frac{16}{5}$

해설

i) $y = x+k$ 가 점 $(-4, 0)$을 지날 때,

$0 = -4+k \quad \therefore\ k = 4$

ii) $y = x+k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x+k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

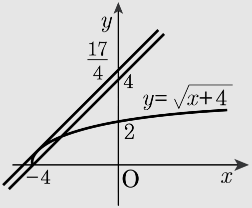
$x^2 + 2kx + k^2 = x+4$

$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 4 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-4) = 0$

$-4k+1+16 = 0 \quad \therefore\ k = \frac{17}{4}$

(i), (ii) 에서 $y = \sqrt{x+k}$ 와 $y = x+k$가 두 점에서 만나려면 $4 \le k < \frac{17}{4}$ 이어야 한다.



33. 세 집합 $A = \{(x, y) \mid y = m(x+1) - 1, m$은 실수$\}$ $B = \{(x,\ y) \mid y = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|,\ x \neq 1$인실수$\}$

$C = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-n} + 2, x \geq n$인 실수$\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 3$ 이기 위한 m의 범위는 ㉠$n(B \cap C) = 2$ 이기 위한 n 의 범위는 ㉡이다. 빈 칸에 들어갈 값으로 알맞게 짝지은 것은?

① ㉠ $m \geq \frac{1}{2}$ ㉡ $n \geq 1$

② ㉠ $m \geq \frac{3}{2}$ ㉡ $n < 1$

③ ㉠ $m > \frac{3}{2}$ ㉡ $n \geq \frac{3}{4}$

④ ㉠ $m > \frac{2}{3}$ ㉡ $n \leq \frac{3}{4}$

⑤ ㉠ $m \geq \frac{2}{3}$ ㉡ $n < \frac{3}{4}$

해설

㉠: 그림처럼, ㉠보다 위에 있을 때 교점이 3개 이다.

$0 = m\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 1$에서 $m = \frac{2}{3}$

$\therefore m$ 의 범위는 $m > \frac{2}{3}$

㉡: 그림의 ㉡보다 왼쪽에 있을 때 교점이 2 개이다.

$y = 2$일 때의 교점은 $2 = \left|\frac{1}{x-1} + 2\right|$

에서

$\left(\frac{3}{4},\ 2\right)$

$\therefore\ n = \frac{3}{4}$

$\therefore n$의 범위는 $n \leq \frac{3}{4}$