1. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉡, ㉤　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의
넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서
$b^2 - 4ac < 0$이면 대응을 갖지 못하고(허근),
$b^2 - 4ac > 0$이면 두 개의 대응을 가지므로
(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로
함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고
그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은
$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히
많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

2. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$　　② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$　　④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f(a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤
$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

3. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

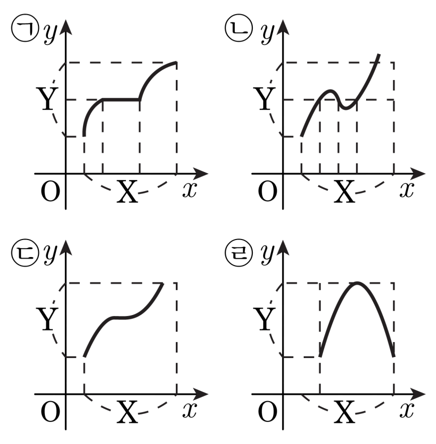
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

4. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

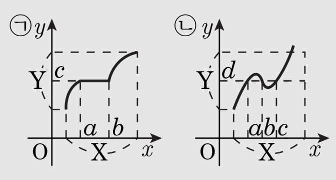


① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)

④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X에서 Y로의 일대일 대응을 찾으면 된다.



㉠ $\{x|a \le x \le b\}$에 속하는
x의 상이 모두 c이므로
일대일 대응이 아니다.
㉡ $a,\ b,\ c$의 상이 모두 d이므로
일대일 대응이 아니다.
㉣, ㉡의 경우와 같다.

5. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24개

해설

a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

6. 두 함수 f, g가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x-1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g와 f의 합성함수이다.)

① 18 ② 12 ③ −15 ④ −24 ⑤ −29

해설

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$
$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로
$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$
$\therefore\ (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$

7. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$

$\therefore\ \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로

$\therefore\ a = -1$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

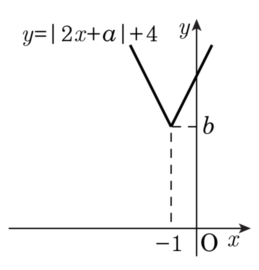
㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$ ∴ 옳다.

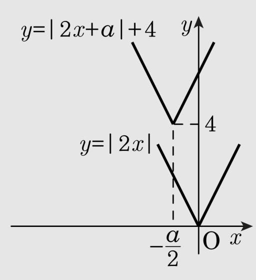
9. 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 10

해설

$y = |2x + a| + 4$
$= \left|2\left(x + \frac{a}{2}\right)\right| + 4$



즉, 함수 $y = |2x + a| + 4$ 의 그래프는 함수 $y = |2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
$-\frac{a}{2}$ 만큼,
y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$-\frac{a}{2} = -1,\ b = 4$

$\therefore\ a = 2,\ b = 4 \qquad \therefore\ ab = 8$

10. 함수 $f(x) = || x - 1 | - a |$ 에서 $f(2) = 4$ 를 만족시키는 양의 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$f(2) = 4$ 이므로
$f(2) = || 2 - 1 | - a | = 4 \rightarrow | 1 - a | = 4$
따라서 $a = -3,\ 5$ 이므로 양수 $a = 5$

11. 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=x^2-x-3$, $g(x)=x+5$에 대하여 $f=g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x)=g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x)=g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2-x-3=x+5$에서 $x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore$ $x=4$ 또는 $x=-2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2-1=3$(개)이다.
$\therefore a=3$

12. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = -|x|,\ g(x) = -x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다.
② 두 함수는 상등이 아니다.
③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$
④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$
⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
$f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 211 개

해설

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

14. $f(x) = 2x-3$일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$를 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(f(x)) = 4x-9$, $f(f(f(x))) = 8x-21$ 이므로
$4x-9 = 8x-21$
$\therefore\ x = 3$

15. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

16. 다음 보기 중에서 역함수를 갖는 것을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y = x - 2$	㉡ $y = \lvert x - 2 \rvert$
㉢ $y = x^2 - 2$	㉣ $y = x^3 - 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

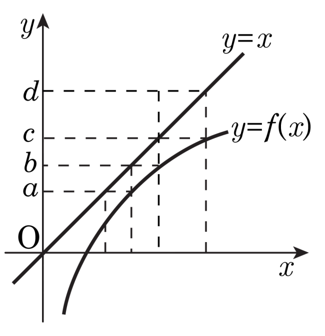
▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $y = x$ 는 일대일 대응인 함수이므로
역함수를 갖는다.
㉡ $y =| x - 2 |$ 에서 $y = 1$ 이면
$x = -1,\ 3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함수를 갖지 않는다.
㉢ $y = x^2 - 2$ 에서 $y = 2$ 이면
$x = \pm 2$ 이므로 일대 일 대응이 아니다.
따라서 주어진 함수는 역함 수를 갖지 않는다.
㉣ $y = x^3 - 2$ 는 일대일 대응이므로
역함수를 갖는다.
이 함수가 일대일 대응임을 다음과 같이 보일 수 있다.
$f(x) = x^3 - 2$ 라고 하자.
㉮ $x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - 2) - (x_2^3 - 2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \neq 0$ 이므로
$f(x_1) \neq f(x_2)$
㉯ $y = f(x)$ 의 치역은 실수전체이다.

17. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

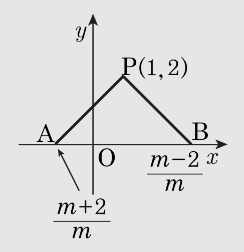
해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
$f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

18. 직선 $y = m|x-1|+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $-\frac{1}{5}$　④ $-\frac{2}{5}$　⑤ 1

해설



$y = m|x-1|+2$

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ⅱ) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 $(1,\ 2)$을 지난다.

x절편은 ㉠에서 $x = \frac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = \frac{-4}{m}$

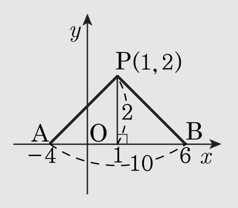
$\therefore$ $\triangle PAB$의 면적이 10이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\frac{2}{5}$

해설



삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m|x-1|+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m|6-1|+2,\ 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$

19. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

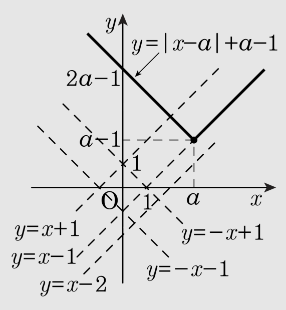
① $y=x+1$　② $y=x-1$　③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$　⑤ $y=-x+1$

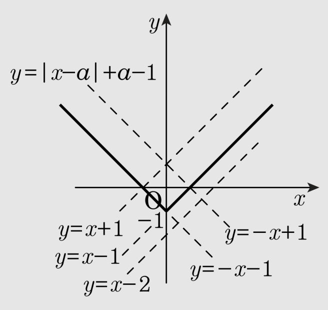
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

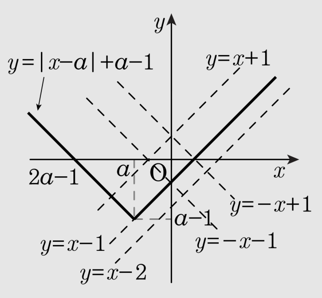
ⅰ) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a \le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ⅱ) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅲ) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

20. 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립하는 함수 $f(x)$를 기함수라고 한다. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 기함수일 때, 다음 <보기>의 함수 중 기함수인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $g(x) \cdot h(x)$ Ⅱ. $g(x) + h(x)$ Ⅲ. $g(h(x))$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $g(-x) \cdot h(-x) = \{-g(x)\} \cdot \{-h(x)\}$
$= g(x)h(x)$ (우함수)
Ⅱ. $g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x)$
$= -\{g(x) + h(x)\}$ (기함수)
Ⅲ. $g(h(-x)) = g(-h(x))$
$= -g(h(x))$ (기함수)

21. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$　$\therefore f(x) = bx$

$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

22. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.

㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$
따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4,\ f(x)$는 정수$\}$이다.

㉢ [반례] $x_1 = -1,\ x_2 = 3$ 일 때
$f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
$f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
$x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

23. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① $y = [x]$ 의 그래프는 함수의 그래프이다.

② $y = [x]$ 의 정의역이 모든 실수일 때, 치역은 정수 전체의 집합이다.

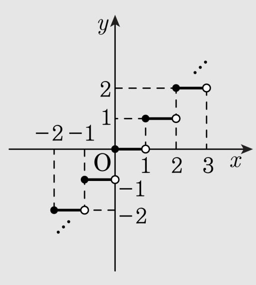
③ $x = 2.1$ 이면 $[x] = 2$ 이다.

④ $x = -1.8$ 이면 $[x] = -2$ 이다.

⑤ $y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

해설

$y = [x]$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$y = [x]$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다.

24. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60　② 55　③ 51　④ 48　⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x-1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36　② -20　③ -4　④ 20　⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x-1$ 에서 $\frac{x+1}{2} = t$ 라고 하면 $x = 2t-1$ 이므로

$f(t) = 6(2t-1)-1 = 12t-7$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16-4x-7 = -4x+9$

$\therefore\ ab = (-4)\cdot 9 = -36$

26. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ 에 대하여 $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$

$f_2(x) = f_0(f(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.
즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x) = f_{3\times33+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore\ f_{100}(100) = \dfrac{100-1}{100} = \dfrac{99}{100}$

27. 세 함수 $f(x) = 2x+1,\ g(x) = x-3,\ h(x) = ax+b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1　② -3　③ 3　④ -6　⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned}((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\ &= g(f(x-3)) \\ &= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\ &= (2x-5)-3 = 2x-8\end{aligned}$$

$2x-8 = ax+b$ 에서 $a=2, b=-8$

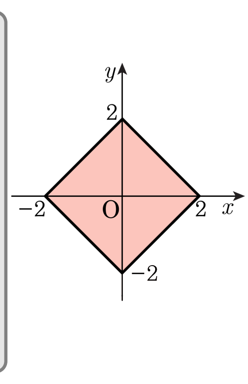
$\therefore a+b=-6$

28. $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8$

29. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에서 X 로의 함수 중 그 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수를 f 라 한다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.

㉡ 함수 f 의 개수는 3개이다.

㉢ 함수 f 는 역함수를 갖는다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 원점에 대하여 대칭이므로
$f(-x) = -f(x)$ 이다. ∴ 거짓
㉡ i) $f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = -1$
ii) $f(-1) = 0,\ f(0) = 0,\ f(1) = 0$
iii) $f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 로 3개이다.
∴ 참
㉢ 위 ㉡에서 ii)는 일대일대응이 아니므로
역함수를 갖지 않는다. ∴ 거짓

30. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음의 조건을 만족시킬 때, $f(2012)$의 값과 같은 것은?

Ⅰ. $f(-x) = f(x)$
Ⅱ. $f(x) = f(10 - x)$

① $f(0)$　② $f(1)$　③ $f(2)$　④ $f(3)$　⑤ $f(4)$

해설

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow y = f(x)$는 y축에 대칭이고,
$f(x) = f(10 - x) \Leftrightarrow y = f(x)$는
$x = 5$에 대칭이다.
따라서 함수 $y = f(x)$는 주기가 10이고,
$2012 = 201 \times 10 + 2$이므로
$f(2012) = f(201 \times 10 + 2) = f(2)$

31. 정수 $k(k \geq 0)$ 에 대하여 함수 $f_k : N \rightarrow Z$ 를 $f_k(n) = n^k$ 라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, N은 자연수 전체의 집합, Z는 정수 전체의 집합이다.)

보 기

ㄱ $f_2(3) \cdot f_3(5)$ 의 양의 약수의 개수는 12개이다.

ㄴ $f_k(m+n) = f_k(m) + f_k(n)$

ㄷ $f_k(mn) = f_k(m) \cdot f_k(n)$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $f_2(3) \cdot f_3(5) = 3^2 \cdot 5^3$ 이므로 양의 약수의 개수는 $(2+1)(3+1) = 12$(개)

$\therefore$ 참

ㄴ $f_k(m+n) = f_k(m) + f_k(n) \Leftrightarrow (m+n)^k \neq m^k + n^k$

$\therefore$ 거짓

ㄷ $f_k(mn) = f_k(m) \cdot f_k(n) \Leftrightarrow (mn)^k = m^k \cdot n^k$

$\therefore$ 참

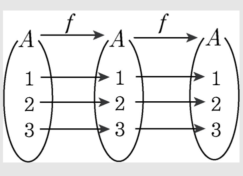
32. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 A 에서 A 로의 함수 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

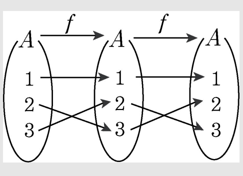
▷ 정답 : 4개

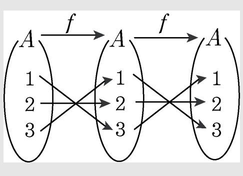
해설

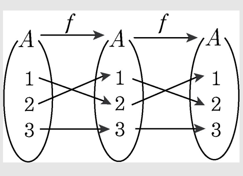
i) $f(x) = x$ 인 경우 1개



ii) 1개의 원소는 자기 자신에 대응되고, 나머지 2개의 원소는 서로 엇갈려 대응되면 된다.
자기 자신에 대응되는 원소가 1, 2, 3인 3 가지 경우가 있다.







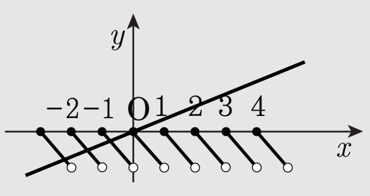
i), ii) 에서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 3 = 4$(개)

33. 함수 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프가 만나는 점은 a 개이고, 이 점들의 x 좌표의 합은 b 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$-3 \le x < -2$ 일 때, $[x] = -3$ 이므로
$y = [x] - x = -3 - x$
$-2 \le x < -1$ 일 때, $[x] = -2$ 이므로
$y = [x] - x = -2 - x$
$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로
$y = [x] - x = -1 - x$
$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
$y = [x] - x = -x$
$1 \le 2x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
$y = [x] - x = 1 - x$
따라서 $y = [x] - x$ 와 $y = \frac{1}{3}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 두 그래프가 만나는 점은 4 개이고
만나는 점의 x 좌표는 다음과 같다.
i) $-3 \le x < -2$ 일 때, $-3 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{9}{4}$
ii) $-2 \le x < -1$ 일 때, $-2 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$
iii) $-1 \le x < 0$ 일 때, $-1 - x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$
iv) $0 \le x < 1$ 일 때, $-x = \frac{1}{3}x \quad \therefore x = 0$
$\therefore\ a = 4$, $b = \left(-\frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{2}$
$\therefore a + b = 4 + \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{2}$