

1. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2, 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

2. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

③ $(4, 4)$

④ $(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

⑤ $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$

위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과

$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3} + 2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

3. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
 접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.
 직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식
 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{(가)}$ = 0
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
 $D = 0$ 에서
 $k = \pm \boxed{(나)}$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm \boxed{(나)}$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$ ② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$
 ③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$ ④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$
 ⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에
 대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$
 $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
 $\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$
 원과 직선이 접하므로 $D = 0$,
 즉 $r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
 $\therefore (가) : k^2 - r^2, (나) : r\sqrt{m^2 + 1}$

4. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < k < 5$ ② $k > 5, k < -5$ ③ $-5 \leq k \leq 5$

④ $k \geq 5, k \geq -5$ ⑤ $0 < k \leq 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + 1}} > \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow k > 5 \text{ 또는 } k < -5$$

5. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1} = 3$

6. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

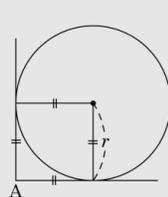
$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

7. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림 처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다. 따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore r = 3$$

8. 직선 $ax + by + 2 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 (a, b) 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

- ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이 거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|a \times 0 + b \times 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$$

\therefore 점 (a, b) 가 그리는 자취길이는

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

9. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은 ?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m 인 접선을
 $y - 2 = m(x - 2)$ 즉, $mx - y - 2m + 2 = 0$
이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

10. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와
 두 점 A, B 에서 만날 때, $OA \cdot OB$ 의 값이 일정함을 다음과 같이
 증명하였다.

㉔, ㉕, ㉖에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O 을 지나는 직선의 방정식을
 $y = mx \dots\dots ㉑$
 원 C 의 방정식을 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$
 $(a > 0, r > 0) \dots\dots ㉒$ 라 하자
 ㉑, ㉒ 에서 $(1 + m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \dots\dots ㉓$
 ㉓ 의 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta =$ (㉔)
 따라서 $OA \cdot OB =$ (㉕) $\cdot |\alpha\beta| =$ (㉖)
 그러므로 m 에 관계없이 $OA \cdot OB$ 의 값은 일정하다.

- ① $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 1 - m^2, |a^2 - r^2|$
 ② $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 1 + m^2, |a^2 - r^2|$
 ③ $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 2(1 - m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ④ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 2(1 + m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ⑤ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, r(1 + m^2), r|a^2 - r^2|$

해설

㉓ 에서 근과 계수와의 관계에서
 $\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$
 $A(\alpha, m\alpha), B(\beta, m\beta)$ 이므로
 $OA \cdot OB = \sqrt{a^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
 $= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$