1. 직선 $y=-2x+a$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

직선 $y=-2x+a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$a=2\times2+1=5$

2. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

③ $(4,\ 4)$

④ $(2\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}+2)$

⑤ $(2\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$
위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과
$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$$\therefore\ x = \frac{4}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}+2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

3. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

> 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
> 접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
> 직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
> $x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
> $(1+m^2)x^2+2mkx+\boxed{(\text{가})}=0$
> 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
> $D=0$ 에서
> $k=\pm\boxed{(\text{나})}$
> 따라서 구하는 접선의 방정식은
> $y=mx\pm\boxed{(\text{나})}$

(가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2$, $k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

4. 원 $x^2+y^2=5$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5<k<5$　② $k>5,\ k<-5$　③ $-5\le k\le 5$

④ $k\ge 5,\ k\ge -5$　⑤ $0<k\le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore\ \frac{|k|}{\sqrt{2^2+1}} > \sqrt{5}$$

$\Rightarrow\ k>5$ 또는 $k<-5$

5. 점 $(1,3)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1,3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1}=3$

6. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

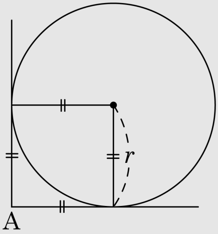
$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

7. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

8. 직선 $ax+by+2=0$ 이 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 $(a,\ b)$ 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이 거리는 원의 반지름과 같다.

$$\therefore \quad \frac{|a\times 0+b\times 0+2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2=4$$

$\therefore$ 점 $(a,\ b)$ 가 그리는 자취길이는

$2\times 2\times \pi=4\pi$

9. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$에 그은 두 접선의 기울기를 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m인 접선을

$y - 2 = m(x-2)$ 즉, $mx - y - 2m + 2 = 0$

이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는

원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1 = \frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m+2| = \sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

10. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > \mathrm{O}, r > \mathrm{O}) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} =$ (㉯) $\cdot |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$$

$\mathrm{A}(\alpha, m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$