

1. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답: $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - (x - 1) = 2 \Rightarrow -2x + 1 = 2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - (x - 1) = 2 \Rightarrow 0 \cdot x = 1$$

∴ 해가 없다.

iii) $1 \leq x$ 일 때,

$$x + x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

3. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

4. x 의 이차방정식 $x^2 - (2a + 2 + m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n 을 정할 때, $m + n$ 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$D = (2a + 2 + m)^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

이 등식을 a 에 관하여 정리하면

$$4a(m - 2) + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 관계없이 항상 성립하려면

$$4(m - 2) = 0, \quad m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m = 2, \quad n = -4 \quad \therefore m + n = -2$$

5. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 의 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$D/4 = 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0$$

$$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1$$

$$\alpha + \beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 16k^2 - 10 + 2k^2$$

$$= 18k^2 - 10$$

$$18k^2 \geq 18, 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8$$

6. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이고, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -5

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \\&= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5\end{aligned}$$

7. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^4 + \beta^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 161

해설

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 13$$

$$\begin{aligned}\alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (13)^2 - 2\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

$$= (13)^2 - 2(-2)^2 = 161$$

8. 이차방정식 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3 일 때, 상수 k 의 값들의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

두 근을 $2\alpha, 3\alpha$ 라 하면

$$2\alpha + 3\alpha = k + 1, (2\alpha)(3\alpha) = k \text{ 이므로},$$

$$5\alpha = k + 1, 6\alpha^2 = k$$

이 두 식에서 α 를 소거하면

$$6 \left(\frac{k+1}{5} \right)^2 = k \text{ 에서 } 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

$$(2k-3)(3k-2) = 0 \therefore k = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

9. x 에 관한 이차방정식 $3(x-1)(x-m) - x(7-m^2) = 4 - m^2$ 의 두 실근의 절댓값이 같고 부호가 다를 때, 실수 m 의 값은?

- ① 5 ② 2 ③ -5 ④ -2 ⑤ 1

해설

$3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 4 = 0$ 의
두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3}(m^2 - 3m - 10) = 0,$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}(m^2 + 3m - 4) < 0$$

$$(m-5)(m+2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2$$

$$(m+4)(m-1) < 0 \quad \therefore -4 < m < 1$$

$$\therefore m = -2$$

10. x 에 대한 방정식 $x^2 + 2ax + a^2 - 2a + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때,
상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근이 α, β 일 때,

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = a^2 - 2a + 3$$

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\&= (-2a)^2 - 4(a^2 - 2a + 3) \\&= 8a - 12\end{aligned}$$

$|\alpha - \beta| = 2$ 이므로,

$$8a - 12 = 4 \quad \therefore a = 2$$

11. $x^2 - 3x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 + x + 25 = 0$

② $x^2 - 3x + 15 = 0$

③ $x^2 - x + 25 = 0$

④ $x^2 + 2x + 13 = 0$

⑤ $x^2 - 2x + 13 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 5$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 10 = -1$$

$$(\alpha^2 + 1) + (\beta^2 + 1) = -1 + 2 = 1$$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) + 1$$

$$= 25 - 1 + 1 = 25$$

$$\therefore x^2 - x + 25 = 0$$

12. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 12일 때,
이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고

$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 라 놓으면

$f(2x) = a(2x - \alpha)(2x - \beta) = 0$

$$a \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \left(x - \frac{\beta}{2} \right) = 0, \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \left(x - \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

$\alpha + \beta = 12$ 이므로

이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ 의 합은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

13. x 에 대한 다항식 $(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) - 4$ 를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

- ① $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 1)$
- ② $(x^2 + 2x + 4)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$
- ③ $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$
- ④ $(x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$
- ⑤ $(x - 1 - \sqrt{3}i)(x - 1 + \sqrt{3}i)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

해설

$x^2 + 2x = Y$ 라 하면,

(준식)

$$= Y^2 + 3Y - 4 = (Y - 1)(Y + 4)$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 4)$$

$$= (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 을 풀 때, a 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, b 를 잘못 보아 $-2, 5$ 를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

- ① $x = -1$ 또는 $x = -2$ ② $x = -1$ 또는 $x = 2$
③ $x = 0$ 또는 $x = 2$ ④ $x = 1$ 또는 $x = 2$
⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서

(i) 처음에는 x 의 계수 a 를 잘못 보고,

상수항 b 를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 의 합은 옳다.

따라서 $b = 2$

(ii) 두 번째는 상수항 b 를 잘못 보고, x 의 계수 a 를 바르게 보았으므로

두 근 $-2, 5$ 의 합은 옳다.

따라서 $a = 3$,

\therefore 주어진 이차방정식은

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 1)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

15. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$A(\alpha, 0), B(\beta, 0)$ ($\alpha < \beta$) 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로

$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면

$$(\beta - \alpha)^2 = 4$$

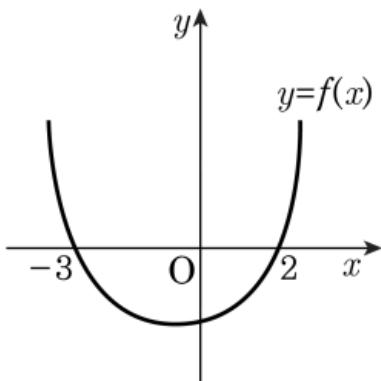
$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 정리하면 } a^2 - 8a - 4 = 0$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8이다

16. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

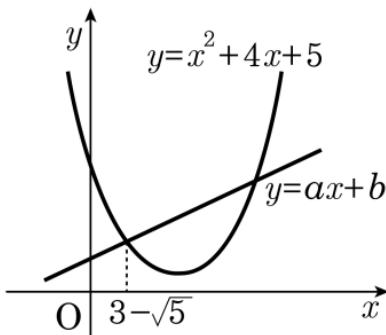
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

17. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5, y = ax + b$ 에서

y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$

$$x^2 - (4+a)x + 5 - b = 0 \cdots ⑦$$

이 때, 계수가 유리수인 방정식 ⑦의 한 근이

$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.

$$\therefore (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$$

$$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$\therefore a + b = 3$$

18. 직선 $y = 2x + k$ 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x + k = x^2$,

즉 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -k$$

두 그래프의 교점의 좌표를

$(\alpha, 2\alpha + k), (\beta, 2\beta + k)$ 라 하면

두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)} = 2\sqrt{10} \text{ 에서}$$

$$\sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$$

이때, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서

$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 - 4(-k), \quad 8 = 4 + 4k$$

$$\therefore k = 1$$

19. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

① $a = 3, b = -2$

② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$

③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$

④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$

⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -a \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = b \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$

이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \textcircled{3}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$$

$$\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$$

$$\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$$

20. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \text{에서 } (a - 2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$a^2 - 12 < 0 \text{에서 } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2$$

21. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 계산하면?

- ① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha + \beta = -3 < 0$, $\alpha\beta = 1 > 0$, $D = 9 - 4 > 0$ \circ 므로 두 근은 모두 음수이다.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha < 0, \beta < 0 \circ \text{므로})$$

$$= -3 - 2 = -5$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm\sqrt{5}i$$

한편, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(-\alpha) \cdot (-1)} + \sqrt{(-\beta) \cdot (-1)}$

$$= \sqrt{-\alpha} \cdot i + \sqrt{-\beta} \cdot i$$

$$= (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}) \cdot i$$

$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 는 (양수) $\times i$ 꼴이다.

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}i$$

22. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m 의 값의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면

$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$ 이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,

준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로

①의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0, \alpha + \beta = -(m+2) > 0, \alpha\beta = m+5 > 0$$

이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는

$$-5 < m < -4$$

23. 방정식 $|x + 5| = 1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

① -9

② -10

③ -11

④ -12

⑤ -13

해설

$$|x + 5| = 1$$

$$\Rightarrow x + 5 = 1 \text{ 또는 } x + 5 = -1$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -6$$

24. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 합은 2이다.
- ② 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 차는 4이다.
- ③ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 곱은 5이다.
- ④ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ⑤ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,
 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 -6이다.

해설

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{에서}$$

$$\text{두근의 합} : -\frac{b}{a}$$

$$\text{두근의 곱} : \frac{c}{a}$$

$$\text{두근의 차} : \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

$$\therefore ② (\text{두근의 차}) = 4i$$

25. x 에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 2\sqrt{3} = 0$$

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\{(\sqrt{3} + 1)x - 2\}(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} - 1 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3} - 1 + (-\sqrt{3}) = -1$$