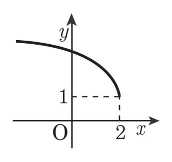
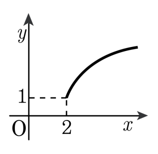
1. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

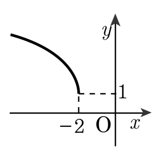
①



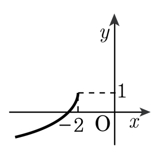
②



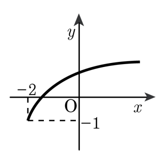
③



④



⑤



해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$

$\Rightarrow$ 꼭짓점 : $(2, 1)$

정의역 : $x \le 2$, 치역 : $y \ge 1$

2. 다음 중 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y = -\sqrt{1-x}+1$　　② $y = \sqrt{x}-1$

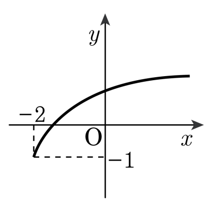
③ $y = \sqrt{x-1}+3$　　④ $y = -\sqrt{-x+2}+2$

⑤ $y = \sqrt{-2x+1}-1$

해설

⑤ $y = \sqrt{ax+b}+c$에서 a의 계수가 다르면
평행이동 또는 대칭이동에 의해 겹쳐지지 않는다.

3. 다음 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행 이동한 것이다. 이 그래프의 함수는?



① $y = \sqrt{x-2}+1$

② $y = \sqrt{x-2}-1$

③ $y = \sqrt{x+2}+1$

④ $y = \sqrt{x+2}-1$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}-1$

해설

x축으로 -2만큼
y축으로 -1만큼 평행이동했으므로
x 대신 $x+2$, y 대신 $y+1$을 대입하면
$y = \sqrt{x+2}-1$

4. 함수 $f(x) = \sqrt{2x-4}$ 에 대하여 $(f \circ f)(52)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$
$f(52) = \sqrt{2 \cdot 52 - 4} = 10$
$\therefore\ (f \circ f)(52) = f(10) = \sqrt{2 \cdot 10 - 4} = 4$

5. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$ 로 놓으면

$f(k) = 4$

$\sqrt{k-1} + 2 = 4,\ \sqrt{k-1} = 2$

$k - 1 = 4$ 에서 $k = 5$

$\therefore\ f^{-1}(4) = 5$

6. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면 ② 1 , 4 사분면

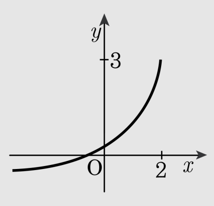
③ 1 , 2 , 3 사분면 ④ 2 , 3 , 4 사분면

⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2, 3)$ 이고 $(0, 1)$ 을 지나므로

$\therefore$ 1, 2, 3 사분면을 지난다.



7. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x|x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y|y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3}x - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

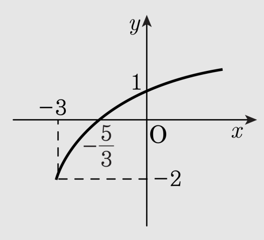
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



8. 다음 보기에서 무리함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=-1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a>0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

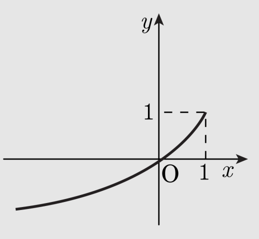
㉢ $a<0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

㉣ $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

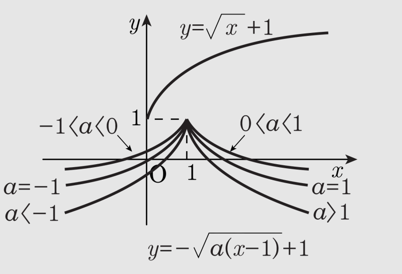
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $a=-1$이면 주어진 무리함수는
$y=-\sqrt{-(x-1)}+1$
$y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a>0$ 또는 $a<0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\le 1\}$
㉣ $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y=\sqrt{x}+1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



9. $-4 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = 1 - \sqrt{a - 3x}$ 의 최댓값이 0 일 때, 최솟값은? (단, a 는 상수이다.)

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y = 1 - \sqrt{a - 3x} = 1 - \sqrt{-3\left(x - \frac{a}{3}\right)}$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

$x = 1$ 일 때 최댓값을 가지므로

$0 = 1 - \sqrt{a - 3} \quad \therefore\ a = 4$

$x = -4$ 일 때 최솟값을 가지므로

$y = 1 - \sqrt{4 - 3 \cdot (-4)} = -3$

따라서 최솟값은 -3 이다.

10. 함수 $y = \sqrt{2x-8} + a$ 의 최솟값이 -3 이고, 이 함수의 그래프가 점 $(b,\ 1)$ 을 지날 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$y = \sqrt{2x-8} + a = \sqrt{2(x-4)} + a$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) 함수의 정의역은 $\{x \mid x \geq 4\}$ 이므로

$x = 4$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

$-3 = \sqrt{2 \cdot 4 - 8} + a \quad \therefore\ a = -3$

ii) 함수의 그래프가 점 $(b,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \sqrt{2b-8} - 3 \quad \therefore\ b = 12$

i), ii) 에 의해 $\frac{b}{a} = \frac{12}{-3} = -4$

11. 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y = f(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

함수 $y = \sqrt{2x}$의 그래프를
x축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y = \sqrt{2(x-a)}$
$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
$y = \sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)} = x$ 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2 - 2x + 2a = 0$
$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0$ 이므로
$a = \frac{1}{2}$

12. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}+2, y = mx$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a < m \leq b$ 이다. 이 때 $a+b$의 값은?

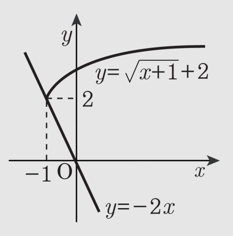
① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면 m의 값의 범위는 $-2 < m \leq 0$ 이어야 한다.

$\therefore a = -2, b = 0$

$\therefore a + b = -2$



13. 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x=a,\ y=b$ 라 할 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$y=\dfrac{x+1}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$

$\therefore$ 점근선은 $x=2,\ y=1$

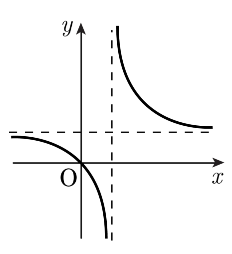
$\therefore\ a=2,\ b=1$

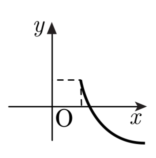
$y=\sqrt{2x+1}$ 의 $\left(x\geq-\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

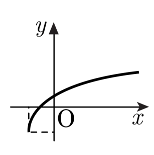
$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ \ (x\geq0)$

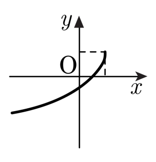
$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

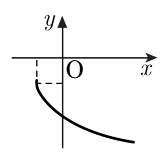
14. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

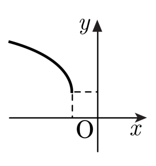


①


②


③


④


⑤


해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

15. $f(x) = \sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$와 $f(x), g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{3}$
② $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{2}$
③ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{2}$
④ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{3}$
⑤ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1}+1$ 에 대하여
i) $y = \sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면
$y-1 = \sqrt{x-1}$ ······ ㉠
㉠을 제곱하면
$(y-1)^2 = x-1,\ y^2-2y+1 = x-1,\ x = y^2-2y+2$
$\therefore\ g(x) = x^2-2x+2$
ii) $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은
$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$의 교점을
구하면 된다.
$g(x) = x$에서 $x^2-2x+2 = x$
$x^2-3x+2=0$, $(x-2)(x-1)=0$
그러므로 $x=2$ *or* $x=1$에서 $y=2$ *or* $y=1$
따라서 두 점$(1,\ 1), (2,\ 2)$사이의 거리는
$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$